Autour

de la

Conjecture de Fermat

Jean CEA

Une conjecture mathématique

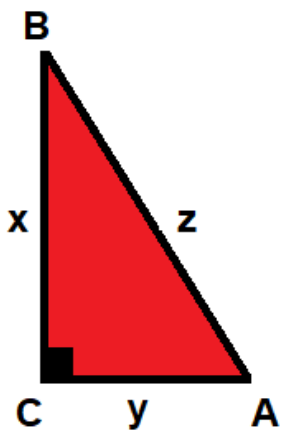
- **C'est un énoncé que l'on *croit* vrai**, MAIS, ***on ne sait pas* démontrer qu'il est vrai.**
- On ne dispose pas non plus d'un seul **contre-exemple** qui nous prouverait que l'assertion est fausse, au moins dans un cas. L'assertion « Tous les nombres entiers sont pairs » est fausse : en effet, je peux exhiber un contre-exemple « 3 » qui n'est pas pair. Donc, quand j'affirme que tous les nombres entiers sont pairs, c'est faux !
- Si un mathématicien fournit une démonstration, alors, l'énoncé devient un **théorème**.
- Une curiosité mathématique, certains mathématiciens supposent qu'une conjecture est vraie, et… vont de l'avant. Ils découvrent de nouvelles propriétés, des théorèmes qui seront vrais ou faux selon la destinée de la conjecture.
- Notons que des logiciens ont augmenté la complexité des mathématiques en introduisant des propositions qui sont… *indécidables, ni vraies, ni fausses !*

Autour de la conjecture de Fermat

- **Pythagore** (-580, -495). Le théorème le plus célèbre au monde est, peut-être, le « Théorème de Pythagore ».
- **Pierre de Fermat (1601-1665).** Son fils édite en **1670** des œuvres de Fermat, dont une qui contient la fameuse conjecture. La conjecture semble dater de **1641**.
- *Des acteurs proposent des solutions de la conjecture dans des cas particuliers.*
- **Sophie Germain** (1776-1831) démontre la conjecture pour des nombres qui porteront son nom.
- **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855). « *Le prince des mathématiciens* » adore cette conjecture parce qu'elle est simple à exprimer et difficile à démontrer ! Il n'a pas réussi à la démontrer !
- *Des acteurs créent les « bons » outils mathématiques, 19ème et 20ème siècles.*
- **Andrew Wiles (1953…).** Il se retire du monde pendant 7-8 ans et nous revient en juin 1993 avec une démonstration… qui contient une faille. La réparation sera terminée en octobre **1994**. Mais, il a dépassé les 40 ans, il n'obtiendra pas la médaille Fields !

Pythagore

Pythagore (-580, -495) et les triangles rectangles



SI *un triangle est rectangle* [c'est-à-dire qu'un de ses angles vaut 90 degrés ou π/2 radians] *ALORS ses cotés x, y, z vérifient la relation* $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$
RECIPROQUEMENT, SI cette relation est vérifiée, ALORS le triangle est rectangle. Nous démontrerons le théorème un peu plus loin.

- *La relation* $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$ **est donc caractéristique des triangles rectangles.**

Pendant des siècles, cette constatation a été une CONJECTURE, elle est devenue un THEOREME dès qu'un mathématicien a exhibé une DEMONSTRATION de sa véracité !

- **Aujourd'hui, il y a près de 400 démonstrations du théorème de Pythagore (de la partie directe « SI… ALORS… »).** On ne sait pas si Pythagore lui-même en connaissait une ! Il semble que la 1ère démonstration complète (avec la réciproque) vienne **d'Euclide** (300 avant J.C.).
- La relation était connue en Mésopotamie plus de 1.000 ans avant Pythagore. Des indiens et des chinois la connaissaient aussi.

Trouver une nouvelle démonstration de ce théorème est devenu un sport chez les mathématiciens. Il y a même un Président des Etats-Unis qui en a proposé une : *Abraham Garfield* (1831-1881)

Les triplets pythagoriciens

- **Il s'agit de 3 nombres x, y et z qui vérifient** $x^2 + y^2 = z^2$ **, x > 0, y > 0, z > 0**
- Trop de nombres vérifient cette relation, on est tenté d'ajouter la condition supplémentaire : ***x, y, z sont des nombres entiers.*** *Fermat l'imposera.*
- *L'exemple classique de triplet pythagoricien en nombres entiers* : « 3, 4, 5 ». Ce triplet vérifie bien la relation :

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{ou} \quad 3.3 + 4.4 = 5.5 \quad \text{ou} \quad 9 + 16 = 25$$

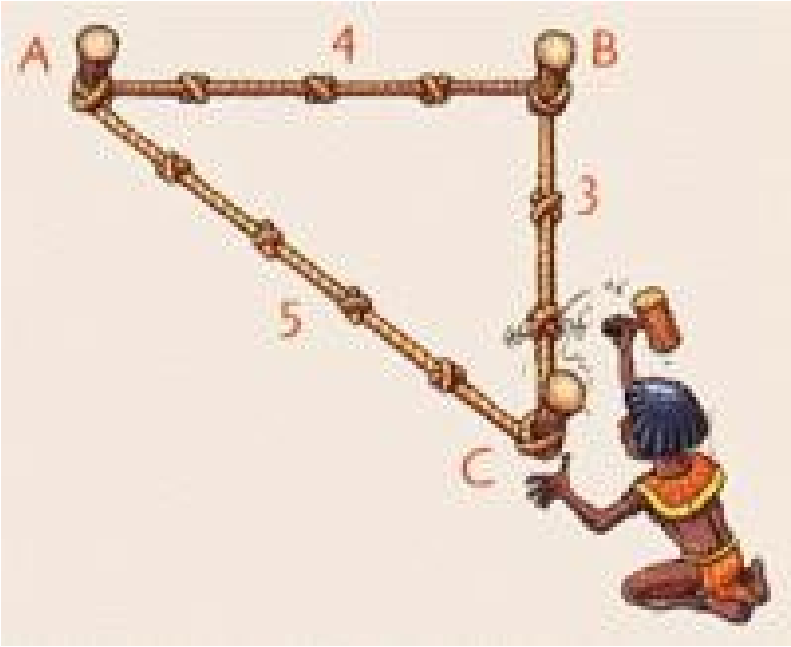
En voici d'autres : (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25)… [Google : triplets pythagoriciens]

- Il y a une **infinité** de triplets qui vérifient cette relation. Par exemple, à partir d'un ***triplet primitif*** comme (3, 4 ,5), on construit une infinité de triplets :

  3k, 4k, 5k où k est un nombre strictement positif.

- Dans une *tablette babylonienne* (*1.800 ans avant J.C.*), nous trouvons une quinzaine de triplets (plus exactement, 2 des 3 nombres de chaque triplet, *Plimpton 322*).

La corde à nœuds, l’équerre



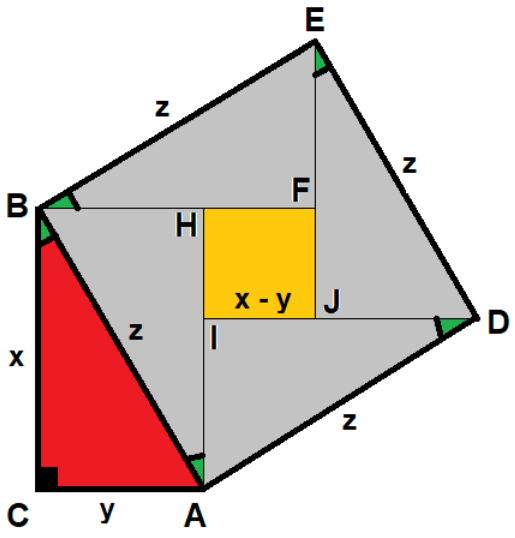
Corde à nœuds, corde à 13 nœuds, corde à 12 nœuds, corde d’arpenteur…

Corde construite avec le triplet pythagoricien : 3, 4, 5.

Elle a beaucoup servi dans le passé pour **tracer des angles droits**.

Crédits images : Wikipedia

Le théorème de Pythagore : la *démonstration* de Bhaskara II (1114-1185)



On donne un triangle ABC, mesures des côtés : x, y, z. on va démontrer l'équivalence :

Mesure angle C = 90 degrés ⇔ **(1) $x^2 + y^2 = z^2$**

Triangle ABC rectangle en C ⇔ **(1) $x^2 + y^2 = z^2$**

➢ ***Proposition directe*** : **Mesure angle C = 90 degrés** ⇒ **$x^2 + y^2 = z^2$**

On a construit ***5 triangles rectangles égaux*** : *ABC et* AHB, BFC, EJD, DIA.

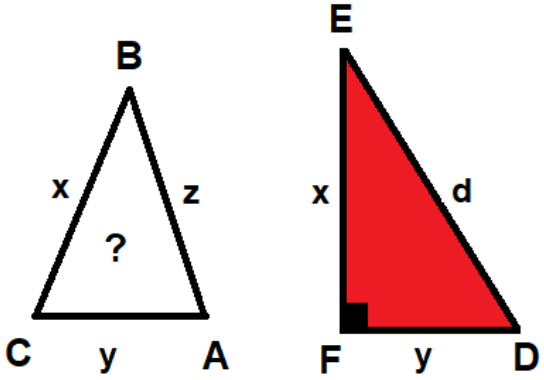
Les angles aigus en vert pris 2 à 2 ont le même complément à 90°, ils *sont égaux*. Et donc les autres angles aigus aussi. Comme les hypoténuses (cotés opposés aux angles droits) sont égales (à z), *ces triangles sont égaux*.

Notons que le petit carré HFJI a pour côté x-y (HI = AH-AI = CB-CA = x-y).

On écrit que *l'aire du grand carré vaut 4 fois l'aire de chaque triangle gris (ou triangle ABC) + aire du petit carré* :

$$z^2 = 4\,(x.y/2) + (x-y)^2$$

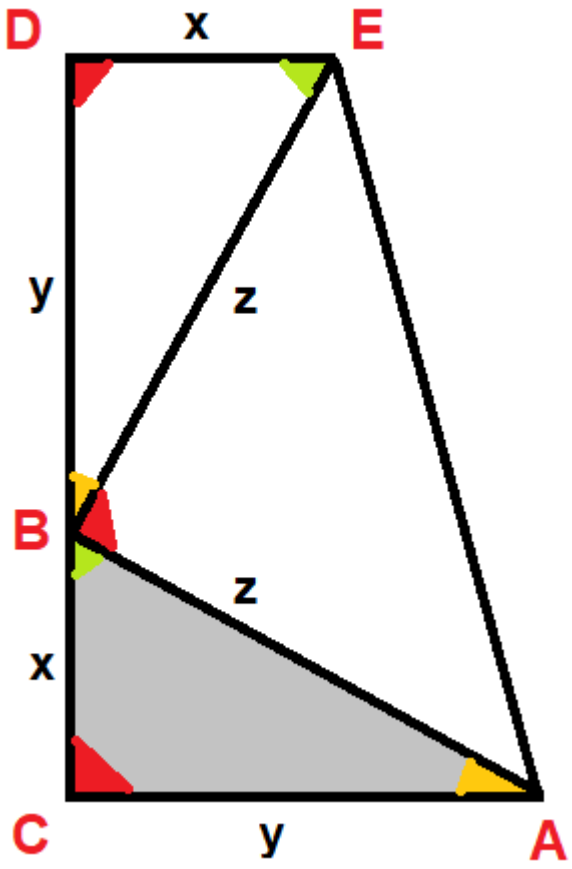
En développant le carré et en simplifiant, on obtient la relation (1).



➢ ***Proposition inverse*** *(ou réciproque)* : **$x^2 + y^2 = z^2$ ⇒ Mesure angle C = 90 degrés**

On donne le triangle ABC, pour lequel **$x^2 + y^2 = z^2$** , on *construit* un triangle rectangle DEF de côtés x et y. *D'après (1) appliquée à DEF, on a :* **$x^2 + y^2 = d^2$, donc d = z. Les 2 triangles ont leurs 3 côtés égaux (2 à 2), ils sont donc égaux. Angle C = Angle F = 90°**

Une démonstration du théorème de Pythagore : Abraham Garfield (1831-1881), Président USA.



On donne un triangle ABC rectangle en C. On va démontrer que :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

On prolonge CB jusqu'à D avec BD = CA = y

On construit DE parallèle à CA et DE = CB = x

Les triangles rectangles ACB et BDE sont égaux (un angle droit entre 2 cotés adjacents égaux) donc BE = AB = z

En B, il y a 3 angles : la somme vaut 180°. Mais la somme des 2 angles aigus (vert et jaune) vaut 90°, donc l'angle en rouge vaut 90°. Le triangle ABE est rectangle.

ACDE est un trapèze. On va écrire que son aire est égale à la somme des aires des 3 triangles :

$[\frac{1}{2}(x + y)].(x + y) = \frac{1}{2} x.y + \frac{1}{2} z.z + \frac{1}{2} x.y$

On développe et on obtient :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

L’école pythagoricienne

- *Une dizaine de générations*.
- Les pythagoriciens subissaient une *longue initiation très sévère*. Ensuite, des *règles très strictes* s’imposaient à eux, dans plusieurs domaines : alimentation, intérêt pour la science, relations avec les femmes (interdiction de battre sa femme, fidélité obligatoire… *il y a 2.500 ans !!!)*
- Les pythagoriciens ont entretenu une relation mystique avec les nombres.
- Avec leurs comportements, les pythagoriciens s’éloignaient des populations.
- Pendant une période, c’est Pythagore qui a dirigé le groupe. A sa mort, sa femme **Théano** a pris sa succession. Elle était mathématicienne elle aussi, y compris au sens du groupe, c’est-à-dire « initiée ».
- Un principe fondamental : « ***tout est nombre*** ».

Pythagore : « Tout est nombre »

Selon Aristote *(-384,-322)*, pour les pythagoriciens, **les choses sont des nombres** : par exemple, *un et esprit sont identiques*, en musique *les intervalles des tons sont des rapports de nombres*.
« Les Pythagoriciens s'appliquèrent tout d'abord aux mathématiques… Trouvant que les choses modèlent essentiellement leur nature sur tous les nombres et que les nombres sont les premiers principes de la nature entière, les Pythagoriciens conclurent que les éléments des nombres sont aussi les éléments de tout ce qui existe, et ils firent du monde une harmonie et un nombre…
Les éléments du nombre sont le pair et l'impair ; *l'impair est fini [limité, structurant, comme une figure géométrique],* tandis que le pair est infini [illimité, désordonné, comme l'air]. »
Il y a « similitude du pair et du féminin, de l'impair et du mâle ». ***La guerre du genre a commencé tôt !***

Selon Wikipedia.

Un héritage difficile

Pythagore disposait d'un héritage qui s'est révélé faux : « **les longueurs sont commensurables à l'unité** ». Ainsi, si vous avez 2 longueurs quelconques, vous pouvez choisir l'unité, et alors, **elles s'expriment par 2 nombres entiers**. De fait, cela n'est vrai que pour les nombres que nous appelons **rationnels** (ratio, quotient) du type p/q où p et q sont 2 nombres entiers ($q \neq 0$).

Exemple : peut-on, en changeant d'unité, repérer les nombres a = 3/4 et b = 5/7 par 2 **nombres entiers** ? Oui, par réduction au même dénominateur. En effet :

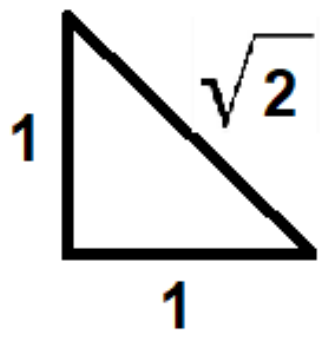
a = 3/4 = 3.7/4.7 = **21/28** et b = 5/7 = 5.4/7.4 = **20/28.**

Si la nouvelle unité vaut **1/28** fois l'ancienne unité, a et b s'expriment alors par **21** et **20.**

- **On ne peut pas comparer de cette façon ¾ et π (parce π n'est pas rationnel)**

Une trahison ?

- Une légende, plusieurs fois rapportée, indique qu'un pythagoricien, **Hippase de Métaponte**, périt noyé pour avoir révélé aux profanes **l'incommensurabilité**. Cette légende indiquerait que la découverte de l'incommensurabilité serait bien pythagoricienne et qu'elle aurait fait l'objet d'un tabou. Mais, les sources datent de 4 siècles plus tard (selon Wikipédia).



Hippase connaissait **les 2 nombres irrationnels** : **$\sqrt{2}$** et le **nombre d'or** **$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.** Il était bien placé pour découvrir les « autres » nombres.

Initialement, le nombre d'or était défini comme une **proportion** : si 2 longueurs a et b vérifient $0 < b < a$ et si $(a + b)/a = a / b$ alors ces proportions sont égales au nombre d'or. Algébriquement, le nombre d'or est la racine positive de l'équation du second degré : $\mathbf{x^2 = x + 1}$

$\sqrt{2}$ est irrationnel

- <u>On va supposer que</u> **$\sqrt{2}$ = p/q** où p et q sont 2 nombres entiers positifs. Si p et q ont des diviseurs communs, on simplifie par ces diviseurs, la fraction ne change pas, on peut donc supposer que **p et q sont premiers entre eux** (le seul diviseur commun est 1). *Tout cela va conduire à une absurdité, donc notre supposition est incorrecte*.
- On multiplie par q les 2 membres de l'égalité, d'où $\sqrt{2}$ .q = p . On élève au carré, il vient : **$2.q^2 = p^2$** donc p^2 est pair. D'après le lemme qui suit, **p est pair**. On a donc **p = 2.r** où r est un entier positif. D'où $2.q^2 = p^2 = 4.r^2$
- Et finalement **$q^2 = 2.r^2$** donc q^2 est pair. Le lemme dit alors : **q est pair**.

p et q sont premiers entre eux, on a trouvé un diviseur commun : 2 !!!

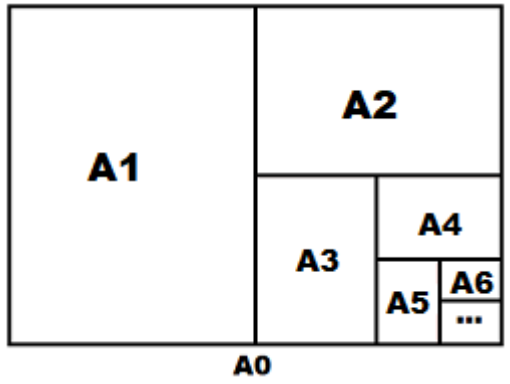
Lemme : **si m^2 est pair alors m est pair** (a entier positif).

Montrons que **m^2 est pair ET m impair** entraînent une contradiction.

En effet, m impair $\Leftrightarrow$ m = 2.n +1, n entier positif. Elevons au carré : $m^2 = (2.n+1)^2 = 4.n^2 + 4.n + 1$, donc **$m^2$ est impair** !!!

- **$\sqrt{2}$ = 1, 414 213 562… une infinité de décimales, pas de période. C'est le cas de tout nombre irrationnel.**

√2 et les formats des feuilles de papier

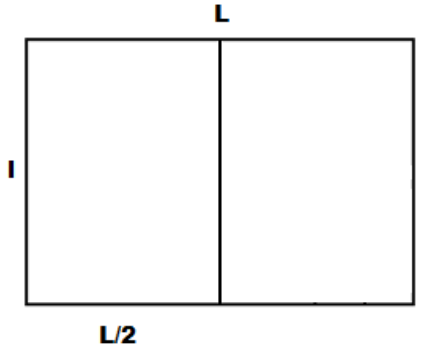


Formats des feuilles de papier : **A0**, A1, A2, A3, **A4**, A5, A6, A7, A8. **Standard : A4**

3 principes :

1. Pour passer d'un format au suivant, par exemple de A2 à A3, on plie le format A2 dans le sens de sa longueur : la largeur de A2 devient la longueur de A3, la longueur de A2 est 2 fois la largeur de A3. Les surfaces sont divisées par 2 à chaque étape.
2. La surface de A0 vaut 1 m2.
3. Le rapport entre longueur et largeur pour un format quelconque vaut **√2** (soit 1,414…)

A0 : 84,1 x 118,9 **cm** **A4 : 21 x 29,7 cm** Surfaces divisées par 2 à chaque étape.



Pourquoi √2 ? Quand on fait une suite de pliages et de découpes, on veut pour des raisons d'économie, **éviter les chutes** ! On veut garder les mêmes proportions.

Calcul du rapport L/l (longueur/ largeur) :

L/**l** = l/(L/2) soit L/l = 2.l/L soit $L^2 = 2.l^2$ et finalement L = √2 . l ou **L / l = √2**

Historique : Georg Christoph Lichtenberg en 1786. Walter Portsmann le propose à la DIN (Institut allemand des normes) en 1918. Norme internationale ISO 216 en 1975.

USA, Canada, GB : ***US Letter***, soit 8 ½ × 11 pouces (21,6 × 27,9 cm)

Pierre de FERMAT

Pierre de FERMAT (1601-1665)

- **Pierre de Fermat**, né à Beaumont-de-Lomagne (il y a des incertitudes sur la date de naissance, entre 1601 et 1607), près de Montauban. Il est décédé à Castres.
- Sa profession : **Juriste**. Mais il était ***en même temps*** : mathématicien, helléniste et physicien.
- Il était surnommé « **le prince des amateurs** ».
- Vaste correspondance.
- *Il a énoncé de nombreux théorèmes… sans fournir les démonstrations*. Cependant, dès 1840, tous les problèmes énoncés par Fermat étaient résolus… sauf un, ***le « dernier théorème de Fermat »***, celui de la conjecture !

Les métiers de Pierre de Fermat

- Commissaire aux requêtes le 14 mai 1631,
- Conseiller de la chambre des enquêtes le 30 décembre 1634 ; il obtint, assez difficilement, de passer dans la chambre de l'édit en août 1648, et mourut à Castres, deux jours après y avoir rapporté un procès.
- C'est seulement comme **conseiller à la cour** que Fermat prit, suivant l'usage, ***la particule nobiliaire***, qu'on ajoute assez souvent à son nom.

La professionnalisation des mathématiciens

- Fermat est né à une époque charnière : des mathématiciens allaient se professionnaliser, par 2 voies différentes. Il n'a pas bénéficié de ces 2 courants. Il a donc dû exercer un métier, ***parallèlement***, il a fait beaucoup de mathématiques et de physique.
- Les 2 voies de la professionnalisation à l'époque :

➢ Celle du métier d'enseignant, avec la création de chaires de mathématiques : par exemple, celle du Collège de France (François 1er, 1530).

➢ Une autre voie plus subtile qui consistait à être « soutenu » (entretenu ?) par un monarque, ainsi François Viète (1640-1603) le « consultant » des rois Henri III et IV. Certains mathématiciens ont beaucoup voyagé à travers l'Europe. Rappelons qu'Archimède (287-212 avant J.C.) était chargé de la défense de Syracuse par son roi.

Fermat le scientifique

- Notations : il a très vite adopté les ***notations*** de Viète (1540-1603) (l'inconnue est désignée par x) puis celles de Descartes (1596-1650) (les inconnues : x, y, z… les paramètres : a, b, c…)
- Il a fait la jonction ***Algèbre-Géométrie***.
- Selon certains mathématiciens, c'est lui qui, le premier a mis en œuvre le ***calcul infinitésimal*** avec sa méthode pour déterminer les tangentes. Il a découvert du même coup des formules de dérivation. Cependant, il semble que ces résultats étaient déjà connus aux Indes.
- Avec Blaise Pascal, il a abordé le **calcul des probabilités**.
- Naturellement, il a beaucoup travaillé sur la **théorie des nombres**. Avec sa fameuse conjecture, il a donné du grain à moudre à des spécialistes du sujet et à ceux… de la **géométrie algébrique**.
- Optique : le Principe de Fermat (**optique**). En gros, il dit que le trajet parcouru par la lumière entre deux points est toujours celui qui optimise le temps de parcours. Plusieurs lois en découlent. En particulier, celles connues en France sous le nom de **Descartes**. En réalité, plusieurs savants ont trouvé ces lois : Willebrord **Snell** (découvertes avant Descartes mais non publiées) et **Ibn Sahl**, publication à Bagdad en 984.

Comment travaillait Fermat

- Pas de colloques, de congrès, de séminaires… comme aujourd'hui, mais beaucoup de correspondances. Et pour cause, *il avait un travail qui exigeait sa présence à quotidienne à Toulouse.*

- Des exposés avec *très peu de démonstrations*. Ce qui donnera lieu à des controverses, en particulier avec Descartes.

- ***« J'ay si peu de commodité d'escrire mes démonstrations, que je me contente d'avoir découvert la vérité et de sçavoir le moyen de la prouver, lorsque j'auray le loisir de le faire. »***

- ***« Je ne doute pas que la chose n'eût pu se polir davantage, mais je suis le plus paresseux de tous les hommes. »***

La conjecture de Fermat (I)

Pythagore s'est intéressé aux triplets x, y, z tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Il y en a des infinités. Mieux, on peut choisir des nombres entiers, comme par exemple :

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$5^2 + 12^2 = 13^2$

…

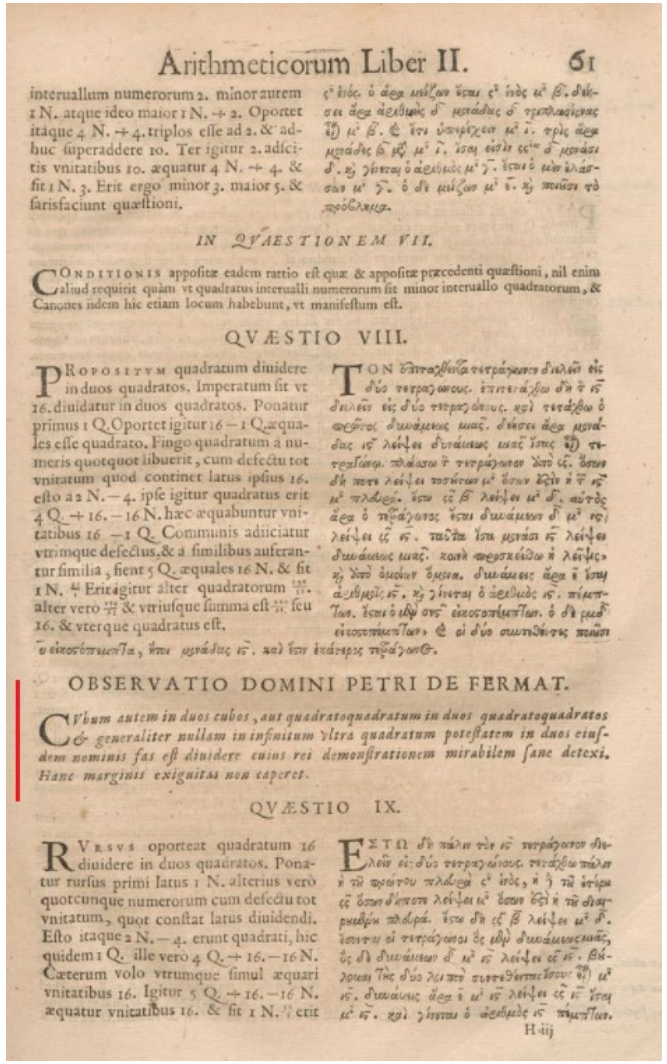
Fermat s'est posé la question de l'existence de ces 3 nombres x, y, z pour un exposant plus grand que 2 : 3, 4, 5…, n… **Il conclut par une conjecture.**

Pierre de Fermat énonce sa conjecture en marge d'une traduction (du grec au latin) des *Arithmétiques* de Diophante, en regard d'un problème ayant trait aux triplets pythagoriciens : « **Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour la contenir** ».

Conjecture de Fermat : **pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on ne peut pas trouver x, y et z entiers, positifs, non nuls tels que :**

$$x^n + y^n = z^n$$

La conjecture de Fermat (II)



Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adicitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVÆSTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones idem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto a 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & a similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter vero $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$. seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. erit

H iij

En **1670**, 5 ans après la mort de Fermat, son fils Samuel réédite les *Arithmétiques ;* il reprend les **annotations** de son père en **italiques**, la conjecture devient publique. La conjecture pourrait dater de 1641, mais on manque de références solides sur cette date.

Cf. Wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Dernier_th%C3%A9or%C3%A8me_de_Fermat.

Un bel article, très lisible, assez complet. Naturellement la démonstration n’y figure pas.

Si l'égalité $6^3 + 8^3 = 9^3$ était correcte, on disposerait d'un *contre-exemple* et la démonstration de la conjecture de Fermat serait terminée, elle serait fausse !

Mais , en réalité, $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$ et tout est à faire, Andrew Wiles aura du travail ! (Merci à Matthieu Romagny pour ce (faux) contre-exemple).

Avec un ordinateur très puissant, on pourrait faire de très nombreux essais, mais, si la conjecture est vraie, on pourra calculer jusqu'à la fin des temps, il restera toujours des calculs à faire pour essayer de trouver un *contre-exemple*.

Un vrai contre-exemple : Conjecture d'Euler (1772)

- Pour **n = 4**, l'équation suivante ne possède aucune solution

$$\mathbf{x^n + y^n + z^n = c^n}$$

où x, y, z et c désignent des **nombres entiers positifs**.

- Pour **n = 5**, l'équation suivante ne possède aucune solution

$$\mathbf{x^n + y^n + z^n + u^n = c^n}$$

où x, y, z, u et c désignent des **nombres entiers positifs**.

On continue en augmentant la valeur de n et le nombre de variables x, y, z, u. **Il y a n- 1 variables**.

Là aussi, on fut longtemps persuadé de la justesse de la proposition.

En fait, elle est fausse !

- La conjecture d'Euler fut infirmée par L. J. Lander et T. R. Parkin en 1966

  n = 5 : $\mathbf{27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5}$

- Noam Elkies (1988) trouva une méthode pour construire des contre-exemples avec n = 4.
- Par la suite, **au moyen de l'ordinateur**, on trouva un **contre-exemple** avec des nombres plus petits

  n = 4 : $\mathbf{95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4}$

- https://www.deleze.name/marcel/culture/Fermat/Fermat.htm.html

Les premières tentatives

- **Fermat** : n = 4, méthode de descente infinie
- **Euler** (1707-1783), n = 3
- **Legendre** (1752-1833), n = 5
- **Lejeune Dirichlet** (1805-1859), n = 5
- **Lamé** (1795-1870), n = 7
- **Dirichlet** (1805-1859), n = 14
- **Kummer** (1810-1893), n < 100 (arithmétique et algèbre)
- **Sophie Germain - Antoine Auguste Le Blanc** (1776-1831), pour une infinité de nombres, ceux qui portent son nom : ***p premier tel que 2p+1 soit aussi premier.***

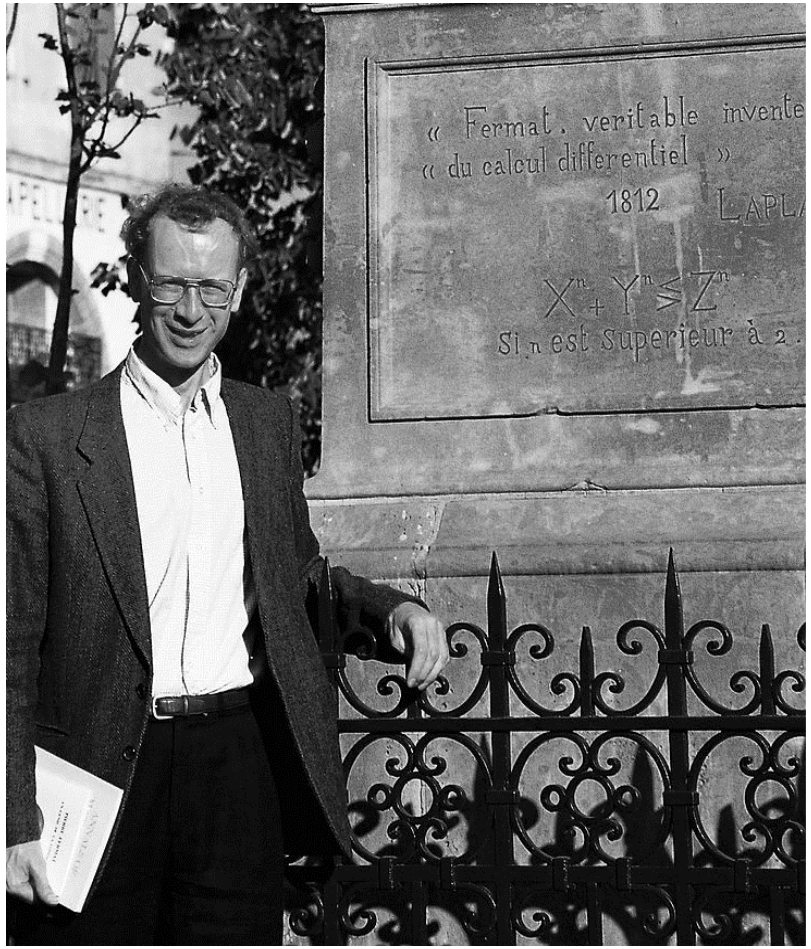
Sophie Germain - Antoine Auguste Le Blanc

- 1776-1831
- *Mathématicienne à 13 ans, autodidacte*. Son père est contre, c'est un métier d'homme ! Il lui confisque les chandelles pour l'empêcher de travailler la nuit.
- Elle prend un nom d'emprunt pour obtenir des documents et communiquer avec des mathématiciens : Antoine Auguste Le Blanc.
- **Elle établit la preuve de la conjecture de Fermat pour certains nombres premiers : *p premier tel que 2p+1 soit aussi premier.* (Ex: 3, 5, 11…)**
- Elle épate **Lagrange** par ses écrits : convoquée, elle doit se démasquer !
- En 1804, elle entre en contact épistolier avec le génial **Gauss**. Deux ans plus tard, Napoléon qui a envahi la Prusse se rapproche de la ville natale de Gauss (Brunswick). Sophie Germain demande au général de l'Empire Pernetty, qu'elle connait, de protéger Gauss. Ce sera fait !
- Elle est obligée de se démasquer une seconde fois : la mathématicienne sera finalement acceptée dans ce milieu d'hommes.

Lettre de Gauss à Sophie Germain 30 avril 1807

« … **Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos mœurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur**… »

Andrew Wiles



Andrew Wiles devant la statue de Pierre de Fermat
Beaumont-de-Lomagne (Octobre 1995)
[Photo de Klaus Barner]

Andrew Wiles et la conjecture de Fermat

- Démonstration de la conjecture de Fermat publiée le 23 juin 1993.
- Mais, cette démonstration contenait une **erreur** détectée en août 1993.
- La solution correcte sera achevée le **19 septembre 1994**. (*rapprocher de 1641*)
- La pression insupportable la dernière année.
- Wiles venait de dépasser les 40 ans, du coup, il ne pouvait plus recevoir la consécration suprême pour un mathématicien : la Médaille Fields.
- Andrew Wiles s'est isolé pendant 7-8 ans pour venir à bout de la conjecture.
- La conjecture est devenue le **Théorème de Fermat-Wiles**
- *A 10 ans, il a eu connaissance de la conjecture de Fermat : livre de mathématiques à la bibliothèque municipale. On parlait d'un théorème vieux de plus de 3 siècles, dont on avait perdu la démonstration et que personne ne savait démontrer.*

Un travail de Titan !

- La preuve détaillée tient en **un millier de pages**. L'article de Wiles : 109 pages. (+ Taylor-Wiles : 20 pages). FERMAT n'avait pas menti : sa marge n'aurait pas suffit !
- WILES cite dans son travail plus de **soixante articles et livres datant de moins de trente ans** et une part importante a **moins de dix ans**.
- Il a utilisé les **résultats de plusieurs dizaines de spécialistes du monde entier**.
- *Il se dit chez les mathématiciens qu'il n'y a qu'une centaine d'entre eux qui comprennent la démonstration de Wiles.*
- Cédric Villani (médaille Fields) dit qu'*il lui faudrait 4 ans d'études pour comprendre la démonstration*.
- https://www.icem-pedagogie-freinet.org/sites/default/files/n6fermat.pdf

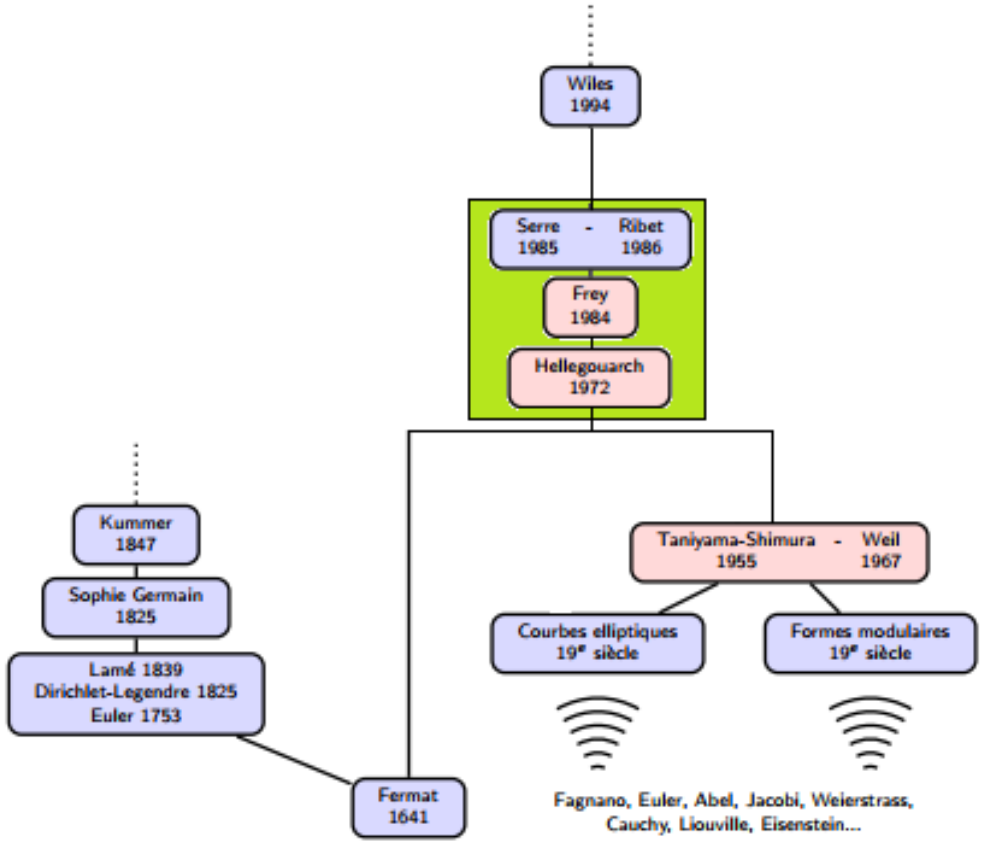
Fermat avait-il trouvé une démonstration « merveilleuse » ?

La réponse d'*Andrew Wiles* : « *Fermat n'aurait jamais pu arriver à cette preuve. C'est une preuve du 20ème siècle. Il aurait été impossible de la découvrir avant.* »

A toutes les étapes de la démonstration, un bon nombre d'objets mathématiques utilisés par Wiles n'existaient pas du temps de Fermat. Ainsi, toutes les portes « modernes » lui étaient fermées.

- La quasi-totalité des mathématiciens estiment donc aujourd'hui que Fermat avait seulement cru démontrer le résultat général, mais qu'il s'était trompé. Avant les travaux de Wiles, peu de professionnels tentaient encore de s'attaquer directement à ce théorème.
- *Malgré cela, de nombreux amateurs optimistes étaient et sont encore persuadés d'avoir découvert une preuve très simple (pas nécessairement celle de Fermat) ; leurs erreurs sont d'un niveau très élémentaire. Pratiquement toutes nos universités reçoivent de la part de mathématiciens amateurs, des démonstrations du dernier théorème de Fermat : toutes sont fausses !*
- Toutefois, en mathématiques, on peut toujours s'attendre à des surprises, aussi, laissons notre grand homme bénéficier du doute.

Lien entre 2 conjectures : Fermat et STW (Shimura-Taniyama-Weil)



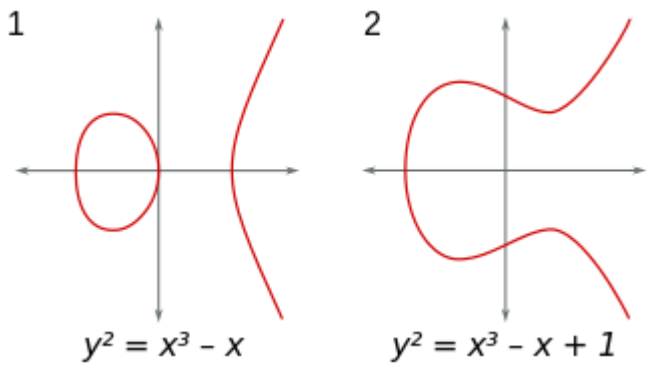
Dessin original de Matthieu Romagny, une légère modification pour l'adapter à l'exposé. Mes remerciements à Romagny.

https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/exposes/presentation_fermat.pdf

Courbes et nombres rationnels

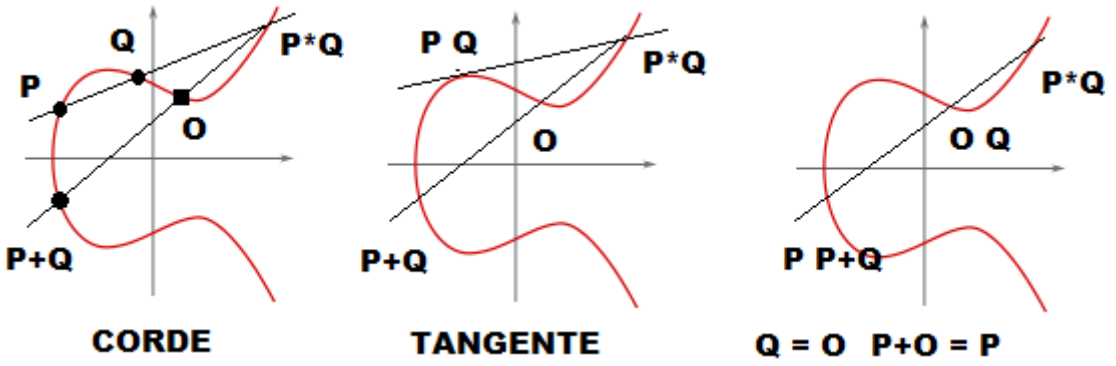
- **Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$ a, b, c nombres entiers**
- Si c = 0 alors a et b sont nuls. On peut donc supposer que **c > 0**
- Posons **x = a/c et y = b/c**. Divisons la relation de Pythagore par c, il vient : $x^2 + y^2 = 1$
- Les points du plan de coordonnées x, y qui vérifient la relation précédente constituent le **cercle de centre O et de rayon 1**.
- Si le point **x,y est rationnel** (ses coordonnées sont rationnelles), elles s'écrivent comme des fractions du type p/q. Par réduction au même dénominateur, on retrouve des entiers a, b, c tels que x = a/c, y = b/c et qui vérifient : $a^2 + b^2 = c^2$
- **La recherche des triplets pythagoriciens passe par la recherche des points à coordonnées rationnelles sur une courbe. Avec cette technique, on peut trouver tous les triplets pythagoriciens.**

Un aperçu sur les courbes elliptiques



On choisit une **origine O** des points de la courbe elliptique.
On peut définir sur les points d'une telle courbe, une opération analogue à l'addition sur les nombres, avec toutes ses propriétés :
- *Loi interne* : à P et Q sur la courbe, on associe P+Q sur la courbe,
- Associativité (P+Q)+R = P+(Q+R),
- *Elément neutre* : P+O = P,
- *Élément opposé ou symétrique* : P+Q = O Q est appelé –P

Le groupe est dit « ***abélien*** » si la loi est commutative P+Q = Q+P



La construction par **cordes et tangentes** se traduit par des équations. Elles nous permettent de calculer les coordonnées de P+Q à partir de celles de P et Q.

- On peut travailler avec des coefficients réels dans l'équation de la courbe : les coordonnées de nos points P, Q, P+Q… sont alors des nombres réels.
- Mais, on peut aussi travailler avec des coefficients rationnels, on reste alors dans du rationnel. On dit courbes elliptiques sur Q, les nombres rationnels. Nombreux travaux.

L'équation générale d'une courbe elliptique

L'équation générale d'une courbe elliptique est : $y^2 = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$. Par des changements dans le repérage des axes (unité, place de l'axe des ordonnées…) on peut se ramener à : $\mathbf{y^2 = x^3 + a.x + b}$

Nous passons allégrement des courbes aux nombres, de la géométrie à l'algèbre et à l'arithmétique. Nous transportons les structures classiques des « Groupes ». Il fallait faire des avancées dans la **géométrie algébrique** et dans la **théorie des nombres** avant de pouvoir démontrer la conjecture de Fermat.

Une courbe elliptique a une importance capitale dans les conjectures de Fermat et Shimura-Taniyama-Weil :
La courbe elliptique d'*Hellegouarch :*

$$\mathbf{y^2 = x(x-a^n)(x+b^n)}$$

où les nombres $\mathbf{a^n}$ *et* $\mathbf{b^n}$ *vérifient :*

$$\mathbf{a^n + b^n = c^n}$$

Ribet finira par démontrer que **cette courbe n'est pas modulaire** et qu'alors cela contredit la conjecture de STW.

Les formes modulaires sont d'une très grande complexité, nous n'y toucherons pas (variable complexe, fonctions holomorphes, séries de Fourier…). Niveau fin de licence.

La conjecture STW : Shimura-Taniyama-Weil

- En **1955**, *coup de tonnerre*, les courbes elliptiques et les formes modulaires qui ne semblaient avoir aucun lien vont se rencontrer : **Taniyama** et **Shimura** : « **toute courbe elliptique… est (ou peut être associée à) une forme modulaire** ». Deux planètes se rencontrent ! Personne n'y croyait. **Weil** s'investit et précise la conjecture.
- Un autre *coup de tonnerre* encore plus puissant se prépare :
- Yves Hellegouarch (1969) suppose qu'il existe un triplet qui vérifie Fermat, il fait comme si la conjecture était fausse ! Il construit alors une courbe elliptique associée assez complexe.
- Gerhard Frey (1985), à partir de cette solution fictive de Fermat, ***conjecture*** que **la courbe elliptique** associée **ne serait pas modulaire** et que donc, elle défie la conjecture de STW.
- **Ken Ribet** fournira la preuve en **1986**.

➢ **SI Fermat fausse ALORS STW fausse. Par suite : SI STW vraie ALORS F vraie**

- **Un lien inattendu avec plusieurs siècles d'écart !!!**

La recherche selon Andrew Wiles

- « On entre dans la première chambre et elle est obscure. Complètement obscure. On se heurte aux meubles, on finit par connaître leur emplacement. Après quelques six mois, on finit par trouver le commutateur et soudain, la pièce est éclairée. On peut voir exactement où l'on se trouve. Puis on passe à la pièce suivante, et l'on affronte de nouveau six mois d'obscurité. Donc, **chacune des percées qui ont été faites et qui sont parfois brèves, ne durant qu'un jour ou deux**, sont l'accomplissement des mois de tâtonnements dans le noir, sans lesquels il n'y aurait jamais eu de lumière. »
- « Je pensais vraiment que j’étais sur la bonne voie, mais cela ne signifiait pas obligatoirement que j’atteindrais mon but. Il se pouvait que les méthodes nécessaires pour résoudre ce problème particulier eussent dépassé la portée des mathématiques contemporaines. **Peut-être que celles dont j’avais besoin ne verraient pas le jour avant un siècle**. Alors, même si j’étais dans la bonne voie, je pouvais être dans le mauvais siècle. »

La calendrier d'une démonstration (I)

- **1986-1988** : immersion dans le problème. Bibliographie. Choix d'une stratégie.
- **1989** : **première stratégie**, *attaque* via la théorie d'Iwazawa
- **1991** : **changement de stratégie**, exploiter le travail de Flach-Lolyvagin
- **1992** : il se confie à son ami Nick Katz. Décision de faire vérifier ses calculs sous forme d'un cours pour étudiants avancés.
- **1993** : **changement d'orientation** vers une autre famille de courbes elliptiques. Wiles pense en avoir terminé. Série de conférences à Cambridge organise par Coates. Wiles annonce qu'il détient la preuve de la conjecture de Fermat. Joie, succès…
- **Fin été 1993** : il y a une erreur profonde. Wiles appelle à l'aide un de ses brillants élèves : Richard Taylor qui lui suggère de ***revenir*** à Flach-Lolyvagin. Il va le faire sans enthousiasme, avec l'intention de faire un point définitif !

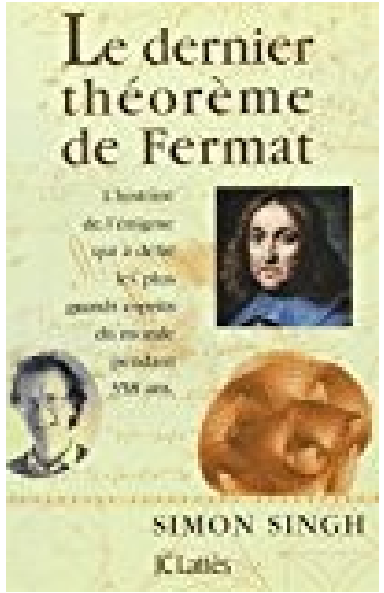
La calendrier d'une démonstration (II)

- Et soudain, le **19 septembre 1994**, *une révélation inattendue sur Flach-Lolyvagin* : « En un éclair, je vis que toutes les choses qui l'empêchaient de marcher c'était ce qui ferait marcher une autre méthode (théorie d'Iwasawa) que j'avais travaillée auparavant. » Alors que prises séparément, Flach-Kolyvagin et Iwasawa étaient inadéquates, ensemble, elles se complètent.
- Jugement de Wiles sur la fin de la démonstration : « **c'était d'une telle beauté, simple et élégant…** »
- **La conjecture de Taniyama-Shimura-Weil est démontrée et du même coup celle de Fermat.**
- Il y aura 2 publications, Wiles (109 pages), Taylor-Wiles (20 pages).
- Ce travail sera exploité par de nombreux mathématiciens.

Les 3 dernières diapositives doivent beaucoup au livre de **Simon Singh** : *« Le dernier théorème de Fermat, J.C. Lattès, Paris, 1998 » et à son fameux film « Horizon Fermat's last theorem ».* Tous nos remerciements.
http://www.dailymotion.com/video/xmr2gr (vidéo avec traduction française)

Bibliographie rapide

- **Simon Singh** :
  - « Le dernier théorème de Fermat, J.C. Lattès, Paris, 1998 ».
  - Le fameux film : http://www.dailymotion.com/video/xmr2gr
- **Conférence de Matthieu Romagny :**
  - https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/exposes/conference_fermat.pdf



- **Lycée des adultes :**
  - **https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/autres_documents/Le_Theoreme_de_Fermat.pdf**
- **Wikipedia :**
  - https://fr.wikipedia.org/wiki/Dernier_th%C3%A9or%C3%A8me_de_Fermat
- **Une aventure mathématique, le théorème de Fermat** a été rédigé par une équipe pluridisciplinaire qui intégrait élèves et professeurs de deux lycées, l'un en France, l'autre en Angleterre. Extra, à visiter et s'y attarder ! Très grand public.
  - https://www.icem-pedagogie-freinet.org/sites/default/files/n6fermat.pdf

MERCI