Quand l’intuition mathématique chancelle

Jean Céa

UNIA - MAMAC
MERCREDI 15 AVRIL 2015 – 14H A 15H30

QUELQUES CITATIONS SUR LES INFINIS

- « L’infini, c’est long, surtout vers la fin. » *Alphonse Allais*.
- « On dirait que l’infini prend plaisir à nous bercer nous-mêmes dans cette immensité du doute. » *G. Flaubert*
- « Le mathématicien vous dira que l'infini des nombres existe et ne se démontre pas ». *Honoré de Balzac*
- « L'homme est désespéré de faire partie d'un monde infini, où il compte pour zéro ». *Ernest Renan*
- « Lorsque nous faisons intervenir l'infini, nous n'obtenons pas les mêmes théorèmes... » *Henri-Léon Lebesgue*
- L'idée de l'infini, se présente comme un paradoxe: c'est à la fois l'idée la plus claire et distincte, et l'idée la plus incompréhensible. *Wikipédia*

Deux ensembles infinis (I)

L'ensemble des nombres entiers naturels N

L'ensemble des nombres entiers 0, 1, 2, 3… a une propriété importante : **tout nombre entier a un suivant qui lui est supérieur et qui diffère de 1 unité**. Cet ensemble est noté **N**, comme entiers **N**aturels, il est dit **infini**.

Comme nous allons le voir, les ensembles infinis ont des propriétés, pour le moins, surprenantes.

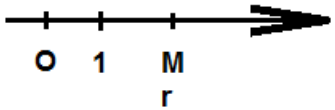
Voici un avant goût : désignons par **P** l'ensemble des nombres **pairs**. **N** contient **P** ainsi que les nombres impairs. il semble 2 fois plus grand que **P.** C'est faux : ***N** et **P** contiennent le même nombre d'éléments.*

Deux ensembles infinis (II)

L'ensemble des nombres réels « R »

On peut identifier les nombres réels et les points d'une droite orientée :

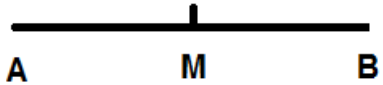
M ↔ r



L'ensemble R contient N, cela nous permet de dire que R est infini lui aussi.

Notons que l'ensemble des nombres entre 0 et 1, noté **[0,1] est infini** lui aussi : il contient les points 1/(1+0), 1/(1+1), 1/(1+2)… 1/(1+n)… qui sont, comme N, en nombre infini.

Un autre un avant goût :



M est le milieu de AB. Naturellement, il y a autant de points sur AM que sur MB. **Mais, il y a le même nombre de points sur AB que sur les segments AM et MB !!! Une partie contient autant d'éléments que le tout.**

L’ensemble des nombres entiers naturels : N

- Pour montrer **la complexité introduite par l'infini**, il est classique de commencer par exposer l'exemple de « **L'hôtel de Hilbert** ».
- *David Hilbert était un des plus grands mathématiciens du XXe siècle, au même titre que Henri Poincaré.*
- J'ai déjà exposé ce fameux hôtel dans ma conférence « Voyage au pays des nombres ».
- Aussi, pour changer, j'ai construit un *autre exemple*, qui conduit à des constatations analogues pour le moins surprenantes : **le paradoxe des milliardaires**.

Le paradoxe des milliardaires (I)

- **SI les terriens étaient en quantité infinie de façon qu'on puisse les énumérer : t_0 t_1 t_2 t_3 … t_n … et SI chacun d'eux disposait de 1 euro, ALORS ils deviendraient tous milliardaires !**
- **Le percepteur terrestre commence par réclamer 1 euro à chaque terrien.** ***Il collecte un tas infini d'euros.***
- **Il fait un premier tas m_0 de 1 milliard d'euros, il continue avec les tas m_1 m_2 m_3… m_n… de 1 milliard chacun.** ***Il peut le faire puisqu'on peut toujours trouver un milliard après n'importe quelle somme distribuée !*** *Par exemple, après une distribution de 351 milliards, on dispose du 352ème milliard... et ainsi de suite.*
- **Il distribue les tas : m_0 à t_0 , m_1 à t_1 , m_2 à t_2… et il continue. Tous les terriens deviennent milliardaires !**

Le paradoxe des milliardaires (II)

- **Une Exoplanète amie « E », avec une infinité d'habitants e_0 e_1 e_2 e_3 … e_n … demande aux riches terriens un milliard d'euros pour chacun de ses habitants. Comment faire ?**
- **C'est simple : les tas des numéros pairs vont aux terriens, ceux des numéros impairs iront aux habitants de l'exoplanète amie (ou bien chaque terrien donne 1 euro et on recommence le même processus).**
- **On peut continuer ce jeu avec d'autres planètes !**
- **Mais, voilà que le percepteur terrestre qui a le numéro t_0 dans l'énumération, décide de se servir 2 milliards. Comment faire ?**
- **t_0 récupère les tas m_0 *et* m_1 , ensuite, il donne le tas suivant m_2 au terrien suivant t_1 ; il continue : m_3 à t_2 , m_4 à t_3 … m_{n+1} à t_n ... Ainsi, tous les terriens seront servis.**

Comparaison des ensembles

Comment comparer le nombre d'éléments de 2 ensembles ?

- Dans une salle de bal, il y a *2 ensembles particuliers : les danseurs et les danseuses. Un* **appariement total** *est possible* ***si l'on peut former des couples sans laisser personne de côté*** (Francis Loret).

Au lieu d'appariement total, on dit aussi association 1 à 1 ou **bijection** (pour les matheux).

Si X et Y sont les 2 ensembles, l'appariement doit avoir les propriétés suivantes :

- **A *tout* élément de X est associé *un élément et un seul* de Y.**
- **A *tout* élément de Y est associé *un élément et un seul* de X.**

Une *bijection* associe les éléments de X et Y par couples, leur nombre d'éléments est donc le même, fini ou infini !

Ensembles dénombrables

- **L'ensemble des nombres entiers N est le plus simple des ensembles infinis. On dit qu'il est DENOMBRABLE.**
- **Par extension, on dira qu'un ensemble X est dénombrable** *s'il a autant d'éléments que N, donc, s'il existe* une **bijection** *entre* **N** *et* **X. Les éléments de X peuvent être *énumérés* et notés comme une *suite*.**
- Les éléments de N sont notés :

  0 1 2 3 … n …
- Les éléments associés de X peuvent alors être notés :

  x_0 x_1 x_2 x_3 … x_n …

  n et $\mathbf{x_n}$ sont associés par la bijection

Exemples d'ensembles dénombrables

Les ensembles des nombres *pairs, impairs, carrés* ont le même nombre d'éléments que N.

Nombres pairs

P	0	2	4	6	8	10	...	2p	...
N	0	1	2	3	4	5	...	p	...

Nombres impairs

I	1	3	5	7	9	11	...	2p + 1	...
N	0	1	2	3	4	5	...	p	...

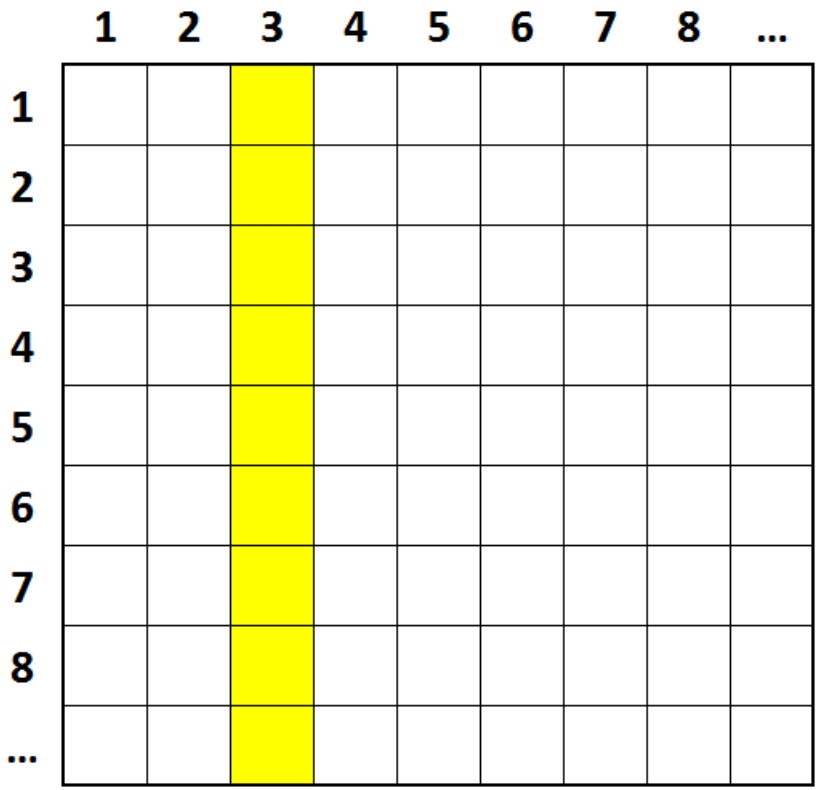
Nombres au carré

K	0	1	4	9	16	25	...	p2	...
N	0	1	2	3	4	5	...	p	...

***Difficile à accepter*, et pourtant dans les 3 cas, il y a bien une bijection : chaque colonne contient un couple de la bijection. Galilée (1564-1642) avait déjà constaté ces paradoxes !**

Encore plus loin !

On dispose d'*une infinité dénombrable d'ensembles* contenant chacun *une infinité dénombrable d'éléments*. On peut énumérer les ensembles ainsi que leurs éléments. La ligne du haut contient les numéros des ensembles. La colonne de gauche contient les numéros des éléments dans chaque ensemble. Par exemple, les **cases en jaune** contiennent les éléments de **l'ensemble N° 3**



Question : peut-on énumérer toutes les cases, c'est-à-dire leur donner un numéro 1, 2, 3, 4… ?

Si oui, alors l'ensemble des cases est dénombrable. C'est dire que l'ensemble des éléments dénombrables des ensembles dénombrable est lui aussi dénombrable !

Le procédé DIAGONAL

	1	2	3	4	5	6	7	8	…
1	1	3	4	10	11	21			
2	2	5	9	12	20				
3	6	8	13	19			X		
4	7	14	18						
5	15	17							
6	16								
7									
8									
…									

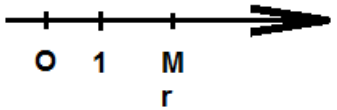
Nota : on pourrait numéroter les cases des diagonales en partant toujours de la colonne 1, de la gauche vers la droite.

Toute case **X** est dans une diagonale et sera donc numérotée. **On peut ainsi énumérer l'ensemble de toutes les cases.** Donc, cet ensemble est **dénombrable**.

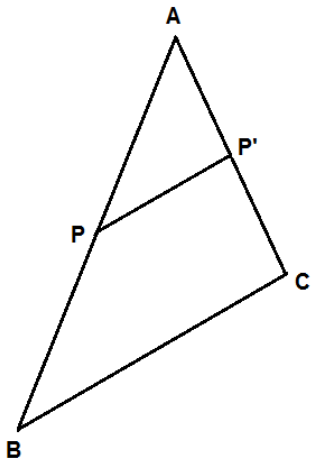
Des ensembles dénombrables d'objets dénombrables forment un ensemble dénombrable. (difficile à imaginer)

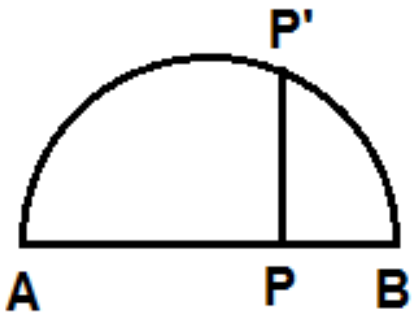
L’ensemble des nombres réels : R

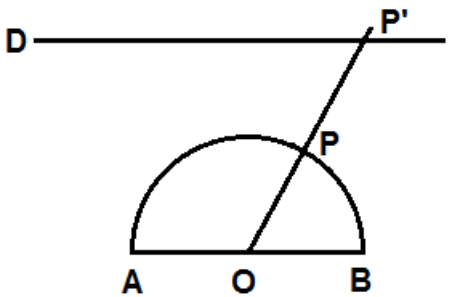
Comme cela a été dit un peu plus haut, on peut identifier les nombres réels avec les points d’une droite. Ainsi, M (point) est identifié avec r (réel). On parlera par la suite de nombres réels ou de points.



Des figures géométriques qui ont un même nombre de points !

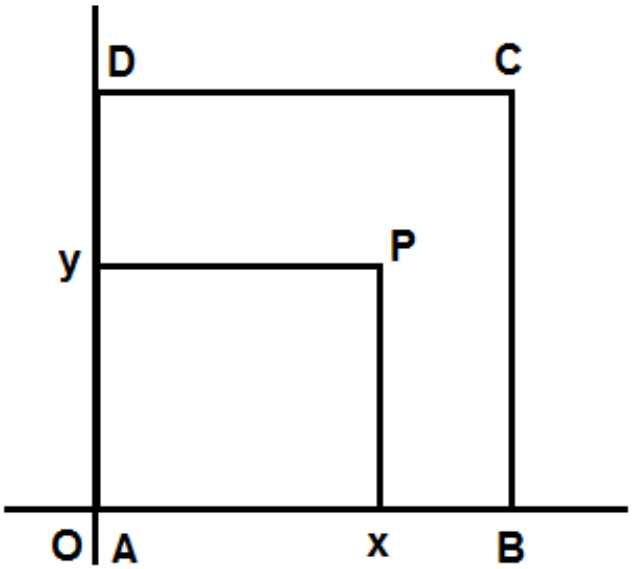


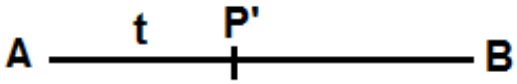




- **Tous les segments, par exemple, AB et AC ont le même cardinal (nombre de points)** : **appariement** entre P et P’ avec PP’ parallèle à BC.
- **Une diamètre et un demi-cercle ont le même cardinal** : **appariement** entre P et P’ avec PP’ perpendiculaire à AB.
- **Une droite et un demi-cercle** (privé de ses extrémités) **ont le même cardinal** : **appariement** entre P et P’ avec PP’ passe par O centre du cercle.
- **Conséquence : le segment AB, le demi-cercle, la droite ont le même cardinal, donc un segment et une droite ont le même nombre de points !!!**

Un côté d'un carré et le carré ont le même cardinal





On s'intéresse au carré ABCD de côtés 1 et au segment AB de longueur 1. Pour simplifier, on se limite aux intérieurs du carré et du segment. Soit un point **P** du carré, on peut écrire les coordonnées X et Y de P sous la forme décimale :

X = 0, $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$… Ex. X = 0, 6 5 7 4 8 2…

Y = 0, $y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5$… Ex. Y = 0, 5 5 1 2 6 9…

A partir de x et y, on construit **t**, l'abscisse de **P'** par **alternance**

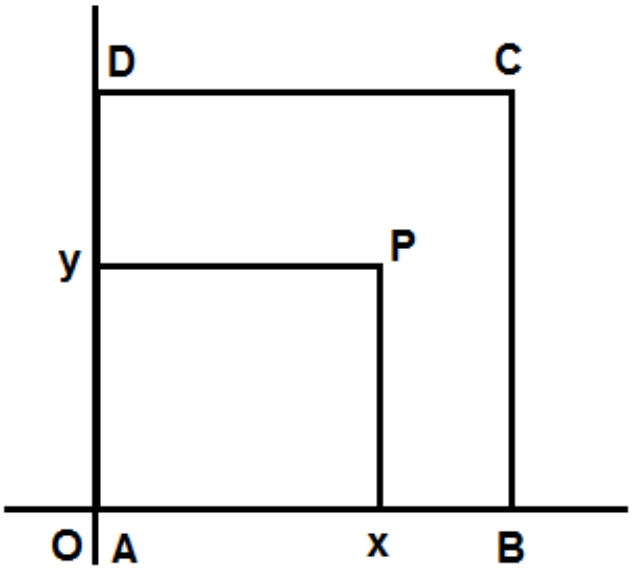
t = 0, $x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3\, x_4\, y_4\, x_5\, y_5$ …

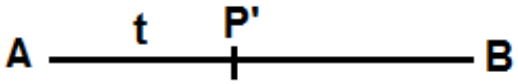
Réciproquement, à partir de t on peut construire x et y.

Par construction : P ↔ P'

« Je le vois, mais je ne le crois pas »

Extrait d'un lettre de Cantor à Dedekind : ***« Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : je le vois, mais je ne le crois pas. »***





La correspondance **P ↔ P'** définit une bijection entre le carré et le segment. P et P' forment un couple dans ces ensembles de points.

Conclusion : même cardinal pour le segment et le carré.

Difficile à croire !!!

Avec la même technique, on trouverait un résultat analogue entre un segment et cube.

CANTOR : R n'est pas dénombrable (I)

- **Hypothèse : l'ensemble des nombres réels contenus dans (0,1) est dénombrable**.
- On pourrait donc les énumérer. Ils s'écriraient comme une **suite**, par exemple :
  - r_1 = 0, **9** 2 5 6 7 4 8…
  - r_2 = 0, 1 **2** 6 8 7 5 9…
  - r_3 = 0, 4 3 **5** 7 5 4 1… et ainsi de suite pour r_4 , r_5 , r_6 …
- En rouge, la **diagonale** de la suite : 1ère décimale de r_1 , 2ème de r_2 , 3ème de r_3…

CANTOR : R n'est pas dénombrable (II)

- On va construire un nombre **$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$** <u>à partir</u> des chiffres de la diagonale. *Nous allons démontrer* **que ce nombre réel x ne figure pas dans la liste de tous les nombres réels r_1 r_2 r_3 …** *L'hypothèse de départ conduit à une absurdité, elle n'est pas fondée*. Donc **(0,1) n'est pas dénombrable**, et à fortiori, **R n'est pas dénombrable.**

La diagonale de CANTOR

- **Construction de $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$** à partir des chiffres de la diagonale :
  - On choisit **x_1 différent de la 1ère décimale de r_1** , ainsi **x et r_1 seront différents.** Exemple de choix : *si la 1ère décimale de r_1 est différente de 1*, on choisit $x_1 = 1$ sinon $x_1 = 2$.
  - De la même façon, on choisit **x_2 différent de la 2ème décimale de r_2** , ainsi **x et r_2 seront différents… et ainsi de suite.**

Le nombre x sera différent de tous les r_n, il n'appartient pas à la liste des r_n, *et pourtant, il est bien dans* (0,1). L'hypothèse R est dénombrable conduit à une contradiction.

Le classement des infinis

La notion de Cardinal d’un ensemble

- On appelle **cardinal** (ou **puissance**, ou **taille**) d'un ensemble le nombre de ses éléments. Celui de **N** est noté $\aleph_0$ (aleph 0)
- ***Propriété de N*** **: on peut trouver des bijections entre N et les nombres pairs, impairs, carrés… Tous ces ensembles ont le même cardinal, celui de N :** $\aleph_0$ **Ainsi, des parties ont autant d'éléments que le tout.**
- ***On peut définir un ensemble infini*** **à partir de cette propriété : si une *partie* d'un ensemble X a le même cardinal que *tout* X, alors X est infini.**
- **L'introduction du cardinal d'un ensemble infini est une RUPTURE avec le passé.**

De nombreux ensembles infinis

- Cantor a montré qu'il y a une infinité d'ensembles infinis avec des cardinaux différents, en particulier N et R. On parle de R comme du Continu : il n'y a pas de « trous » entre 2 réels.
- Soit E un ensemble, on peut définir un nouvel ensemble :

  P(E) = {Ensemble des parties A contenues dans E }
- Théorème de Cantor : si E est un ensemble infini, alors Card E < Card P(E)
- Ainsi, pour tout ensemble infini E, il existe un ensemble "plus grand que lui" au sens des cardinaux. On peut donc imaginer l'existence d'ensembles de cardinaux croissants : $\aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$ $\aleph_4$ $\aleph_5$ …

Hypothèse du continu

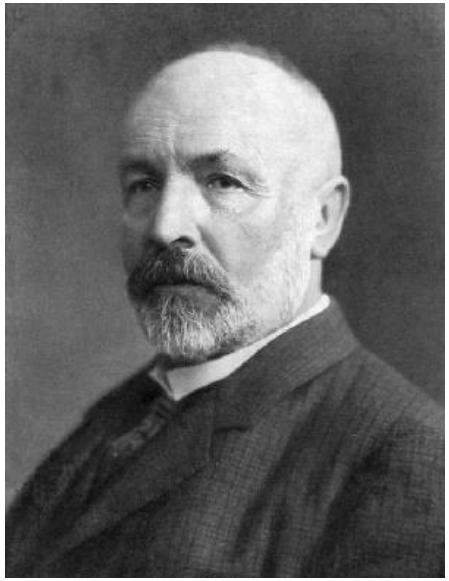
- **Hypothèse du continu : Cantor s'est demandé pendant toute la fin de sa vie (il en devenait malade !) s'il existait un ensemble infini E intermédiaire entre N et R, ou encore :**

  Cardinal de N < Cardinal de E < Cardinal de R

  → **Aucune réponse satisfaisante à ce jour, malgré le travail des logiciens : Kurt Gödel** (1938) et **Paul Joseph Cohen** (1963). On ne sait pas encore ajouter des axiomes au corpus mathématique pour que cette hypothèse soit définitivement vraie ou fausse.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp CANTOR

- 3 mars 1845, Saint-Pétersbourg – 6 janvier 1918, Halle.
- Mathématicien allemand (d'origine danoise), **créateur de la théorie des ensembles à partir de 1874**, avec toutes les nouveautés qu'elle comportait. Avant lui, le concept d'ensemble n'avait pas évolué depuis… Aristote.



Le travail de Cantor est d'un grand intérêt philosophique et a donné lieu à maintes interprétations et à maints débats. Cantor a été confronté à la résistance de la part des mathématiciens de son époque. Il est devenu maniaco-dépressif.

Son hypothèse, appelée **hypothèse du continu**, n'a toujours pas de réponse satisfaisante.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

Un homme courageux

- **Il a lutté contre de nombreux mathématiciens qui n'acceptaient pas sa manipulation des nombres transfinis (les cardinaux des ensembles infinis) comme une arithmétique ordinaire. Cela depuis sa création de la théorie des ensembles en 1874. Il en a souffert à devenir malade.**
- **La notion d'infini était réservée à Dieu depuis l'éternité. Selon John D. Barrow** (Une brève histoire de l'infini) : « longtemps, la notion a été condamnée par l'Église et les théologiens, qui y voyaient une offense à Dieu , le plus grand de tous les infinis. Heureusement, le célèbre mathématicien Georg Cantor, auquel il rend hommage, osa braver l'interdit au XIX ème siècle et émit alors certaines des pensées les plus profondes sur le sujet ».
- http://www.laffont.fr/site/une_breve_histoire_de_l_infini_&100&9782221109267.html

Entracte : une devinette

La jeune fille et le roi cruel

- **Un roi cruel a fait mettre au cachot une jeune fille qui refusait de l'épouser.**

- **Après une année passée sans que la jeune fille revienne sur sa décision, le roi la fait venir dans la cour du château et lui propose un marché.**
- **Je vais ramasser deux cailloux, un noir et un blanc, lui dit-il et les tenir cachés chacun dans une main. Tu choisiras alors librement l'une des deux mains. Si tu tires le caillou blanc tu seras libre, si tu tires le noir, tu m'épouseras.**
- **La jeune fille accepte ce marché avec grande crainte. Mais sa crainte se transforme en panique quand elle voit que le roi se penche pour ramasser subrepticement deux cailloux noirs ! Elle ne peut pas traiter le roi de tricheur !**

- **Que peut-elle faire pour ne pas épouser ce roi si cruel ?**

La jeune fille roule le roi cruel

- **En réalité, la contrainte "Je vais ramasser un caillou blanc et un noir", contrainte qui n'est pas respectée par le roi, se retourne joliment contre lui.**
  La jeune fille choisit un caillou dans l'une des mains et le fait aussitôt volontairement tomber à terre au milieu des autres dans la cour. On ne le voit plus.
- **"PARDON dit-elle, mais la couleur de celui qui reste, décide aussi bien de mon sort en donnant par opposition la couleur de celui qui est tombé".**
- **L'autre est noir, bien sûr, et la jeune fille est LIBRE car elle est censée avoir choisi un blanc tombé à terre !**
- ***Ces deux diapositives sont extraites du site de Thérèse Eveilleau, tous mes remerciements. Son site est d'une grande richesse, vous y trouverez de nombreux paradoxes.***

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/paradoxe/indexF.htm

Statistiques

On peut faire dire n’importe quoi à des statistiques.

Et pourtant, bien utilisées, les statistiques constituent un outil indispensable.

Statistiques et … Jugements hâtifs (I)

- *Quand j'enseignais les statistiques en licence de mathématiques, je donnais souvent deux exemples très simples de* ***manipulation*** *:*
- **L'absentéisme a augmenté chez les instituteurs**! Cela était **vrai**. *Seraient-ils devenus plus paresseux ?* En réalité, cette constatation est basée sur des **échantillons différents**. Avant la dernière guerre, les hommes étaient plus nombreux dans notre enseignement primaire. Après la guerre, *l'échantillon a évolué* : il y a davantage de femmes. Pour plusieurs raisons dans notre société, les femmes sont amenées à s'absenter plus souvent que les hommes, quelles que soient leurs professions.

Statistiques et … Jugements hâtifs (II)

- **Il y a plus d'accidents du travail chez les travailleurs immigrés** que chez les « français de souche ». **Vrai**, mais argument fallacieux : les ouvriers du bâtiment et des travaux publics (français ou étrangers) ont plus d'accident que les autres, et comme les immigrés sont très nombreux dans ce secteur, tout s'explique.
- Donc méfiance et gare aux **manipulations**.

Paradoxes

- Etymologiquement, paradoxe vient du grec **paradoxos** signifiant « **ce qui va contre l'opinion commune** ». Bien qu'actuellement plusieurs définitions existent, les diverses significations attribuées à ce mot conservent toujours cette **référence à un énoncé provoquant une émotion de surprise, car contraire au sens commun, à ce qui est attendu.**
- **Au sens strict, le paradoxe est toute conclusion apparemment inacceptable dérivant de prémisses qui, elle, semblent acceptables, par l'intermédiaire de raisonnements qui semblent corrects.** En réalité, soit la solution n'est pas réellement inacceptable, soit le point de départ ou le raisonnement peuvent être remis en cause par la mise en évidence d'une faille non perceptible au premier abord.
- Cf. http://perso-math.univ-mlv.fr/users/fradelizi.matthieu/pdf/ter-marsiglietti-09.pdf

Le paradoxe de Simpson

Encore de statistiques trompeuses !

- **Une vision globale de certains chiffres peut conduire à une certaine prise de décision.**
- **En entrant dans les détails, on peut être conduit à une décision opposée !**
- **Possibilités d'erreurs ou de … manipulations**

Le paradoxe de Simpson

L'Université de San-José sur Var ouvre 2 filières (2 pour simplifier). Les résultats d'admission pour l'année 2015-2016 viennent de tomber sèchement : 110 filles et 190 garçons admis. Il y avait pourtant autant de candidats filles que de garçons : 1000.

Université misogyne, scandale, manifestations, pétitions… Rien n'y fait, les résultats sont validés.

	A		B		A + B
Postes	**50**	**Admis**	**250**	**Admis**	**Admis**
Filles	700	**35**	300	**75**	**110**
Garçons	300	**15**	700	**175**	**190**
Totaux	**1000**	**50**	**1000**	**250**	**300**

Tout s'explique, scandale apparent. Il s'agit d'une variante du paradoxe de Simpson.

Il y a une variable cachée ou négligée : le nombre de postes pour chaque filière.

(Berkeley 1973).

Beaucoup de filles candidates dans la section « difficile » A (peu de postes).

Beaucoup de garçons candidats dans la section « facile » B (beaucoup de postes).

Dessous, un peu plus d'équilibre, avec 170 postes en A et 200 en B :

	A		B		
Postes	**170**		**200**		**Admis**
Filles	600	102	400	80	**182**
Garçons	400	68	600	120	**188**
Totaux	1000	170	1000	200	**370**

Simpson : Calculs rénaux

- On dispose d'au moins 2 traitements, la **chirurgie** (A) et **la technique de la célioscopie (B :** 3 petits trous dans la peau**…)**
- Que disent les statistiques ? Tests sur 350 patients traités par **A**, idem avec **B** : le traitement **A** a fonctionné avec **78% de réussite** et le traitement **B** avec **83% de réussite**. ***Le choix B semble s'imposer.***
- Mais ici aussi, il y a une **variable cachée ou ignorée** : elle va renverser les résultats, ***c'est A alors qui devrait s'imposer*** !!!
- **La variable cachée** : **la taille des calculs**.

Calculs	Traitement A	Traitement B
Petits calculs (<2cm)	81/87 93%	234/270 87%
Gros calculs (>2cm)	192/263 73%	55/80 69%
Total	273/350 78%	289/350 83%

(Les nombres présentés sont réels). Remarquer les échantillonnages dans le traitement A et dans le traitement B.

Données dans : https://sciencetonnante.wordpress.com/2013/04/29/le-paradoxe-de-simpson/

Une analyse du paradoxe de Simpson

- Une corrélation peut disparaître ou même s'inverser suivant que l'on considère les données dans **leur ensemble**, ou bien **segmentées par groupes**. Pour que le paradoxe se produise, il faut 2 ingrédients :
- 1. **Un facteur de confusion (variable cachée, ignorée…)**. C'est une variable qui influe sur le résultat final et qui n'est pas explicitée au départ. Ce facteur va introduire une division en « groupes » plus affinés.
- 2. **Une certaine hétérogénéité des groupes** : dans le cas des reins, si on compare les résultats : A, gros calculs et B, petits calculs, les résultats sont 192 sur 263 et 234 sur 270 patients. Il y a un avantage de 42 guéris pour le B. Les nombres des autres cas sont trop faibles pour contrebalancer cet écart.
- https://sciencetonnante.wordpress.com/2013/04/29/le-paradoxe-de-simpson/

Pour finir

Le paradoxe des anniversaires

Le paradoxe du menteur

Le paradoxe du barbier

Le paradoxe des anniversaires

- **Une petite fête entre amis**. Surprise : **deux invités** découvrent que **leur anniversaire tombe le même jour** ! (les années de naissance peuvent être différentes)
- *Selon des mathématiques rigoureuses* :
- **Dans un groupe d'environ 25 personnes, il y a plus de 50% de chance que deux de ces personnes aient leur anniversaire le même jour.**
- **Dans un groupe de 50 personnes, il y a plus de 95% de chance que deux personnes aient leur anniversaire le même jour**.
- **C'est contraire à notre intuition !!! D'où le nom : Paradoxe des anniversaires**
- https://sciencetonnante.wordpress.com/2012/05/28/le-paradoxe-des-anniversaires/

Le paradoxe des anniversaires : preuve

- ***Ce calcul peut être évité par les non-mathématiciens !***
- Calcul pour un groupe de **N personnes**. **On va prendre le problème à l'envers, et calculer la probabilité P que toutes les personnes aient leur anniversaire un jour différent. On procède par dénombrement.**
- Ensemble de tous les cas possibles : pour la première personne, 365 dates sont possibles, pour la seconde aussi, de même que pour la troisième et toutes les autres. Si on multiplie tout ça, il y a donc 365^N cas possibles.
- Cas où les anniversaires sont tous différents : pour la première personne il y a 365 choix, pour la seconde il n'en reste que 364, pour la troisième 363, etc. et pour la Nième seulement (365-N+1). Si on multiplie tout ça on trouve la quantité : $365!/(365-N)!$
- On peut donc calculer notre probabilité P qui vaut : $P = \frac{365!}{365^N(365-N)!}$
- Rappel : P est la probabilité que les anniversaires soient tous différents. **Donc la probabilité qu'il y en ait au moins deux identiques est 1 – P**.
- https://sciencetonnante.wordpress.com/2012/05/28/le-paradoxe-des-anniversaires/

Le paradoxe du menteur

- **Il y a de nombreuses versions de ce paradoxe. En voici une que je trouve *particulièrement délicieuse*.**
- **A la frontière de Bordurie, les soldats demandent à chaque visiteur :**
  - Pourquoi venez-vous ici ?
  Si le voyageur dit la vérité, tout va bien, sinon il sera pendu.
  Un jour, un voyageur répond :
  → Je viens ici pour être pendu.
- **En quoi cette réponse est-elle judicieuse ?**
- **Si les soldats ne pendent pas l'homme alors il a menti donc il doit être pendu. Il y a contradiction.**
  Mais s'ils le pendent alors il a dit la vérité et ne devrait pas être pendu. Il y a aussi contradiction.
  Dans les deux cas, les soldats ne pourront pas prendre de décision !
- **Cette présentation du paradoxe du menteur est de Thérèse Eveilleau. Merci et compliments pour la qualité de son site Internet.**
- http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/paradoxe/textes/menteurs.htm#haut
- *Peut-être le plus ancien des paradoxes. Il semble dû au poète crétois Epiménide (vers le VIème siècle avant J.-C.).*

La paradoxe du barbier

- **Le conseil municipal d'un village arrête une ordonnance qui enjoint à son barbier (masculin) de raser tous les habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci.**
- **Le barbier, qui est bien un habitant du village, n'a pas pu respecter cette règle car :**
- **S'il se rase lui-même, il enfreint la règle, car le barbier ne peut raser que les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes ;**
- **S'il ne se rase pas lui-même - qu'il se fasse raser ou qu'il conserve la barbe - il est en tort également, car il a la charge de raser les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes.**
- **Cette règle est donc inapplicable. S'agit-il pour autant d'un paradoxe ? Il n'y a aucune raison de penser qu'un conseil de village ou toute autre instance ne puisse rendre une ordonnance absurde. De fait, loin d'être une antinomie logique, *ce « paradoxe » montre simplement qu'un barbier respectant cette règle ne peut exister.***
- **Bertrand Russell** (1872-1970)
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_du_barbier

FIN

MERCI

Elections : Paradoxe de Condorcet

- **3 candidats se présentent à une élection : Alain (A), Béatrice (B) et Claude (C). Il y aura 3 groupes d'électeurs :**
- **Groupe 1 (40% de la population) : ils préfèrent d'abord A, ensuite B, enfin C, ce que nous écrirons A > B > C**
- **Groupe 2 (35%) : B > C > A**
- **Groupe 3 (25%) : C > A > B**
- **Où est le paradoxe ? Choisissons un mode de scrutin :**
- **Si A est élu, alors les groupes 2 et 3 (35 % + 25 % = 60% de la population) seront mécontents, puisqu'ils préfèrent C à A.**
- **Idem pour les cas B élu ou C élu.**
- **Nicolas de Condorcet a observé en 1785 que dans certaines situations, quel que soit le mode de scrutin que l'on choisit, il est impossible de désigner un vainqueur indiscutable.**
- Nombreux exemples dans la littérature, celui-ci est tiré de :
- *https://sciencetonnante.wordpress.com/2012/04/23/le-paradoxe-de-condorcet/*

Transitivité, non-transitivité

- Au niveau d'un individu, si A>B et B>C, alors A>C. ***C'est la transitivité de la relation de préférence au niveau individuel.***
- **Si on retourne à Alain (A), Béatrice (B) et Claude (C), on s'aperçoit qu'il y a des majorités pour lesquelles : A>B, puis B>C, et que cela n'entraîne pas A>C puisque, au contraire, nous avons dans notre exemple C>A.**
- ***Le paradoxe vient de la NON-transitivité de la relation de préférence, dès qu'on passe au niveau global.***
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Condorcet

Le vainqueur de Condorcet.

- **Heureusement, toutes les situations ne sont pas paradoxales ! Il existe des cas où on échappe au paradoxe. Cela se produit, si par exemple, un des candidats gagnerait en duel contre n'importe lequel des autres. Ainsi si ce dernier est élu, il n'existe aucune possibilité pour qu'une majorité de la population veuille le remplacer par un autre. Il existe donc un vainqueur indiscutable, qu'on appelle alors le vainqueur de Condorcet.**
- *Elections françaises 2002 et 2007. Les vainqueurs de Condorcet sont éliminés ! (Bayrou, Jospin, sondages)*

Kenneth Joseph Arrow

Economiste américain. Prix « Nobel d'économie » en 1972 avec John Hicks.

Dans sa thèse en 1951, K. Arrow a donné une version formalisée du paradoxe de Condorcet, connue sous le nom de théorème d'impossibilité d'Arrow, et qui affirme que dans certains cas, il n'existe pas de manière indiscutable d'agréger des préférences individuelles en une préférence collective.

Il a donc fallu trouver des systèmes électoraux pour éviter le paradoxe de Condorcet. *(avec des frustrations)*

Depuis 1871, la France a ainsi connu une dizaine de changements importants de mode de scrutin législatif, alors que le Royaume-Uni utilise le même depuis le XVIIIe siècle.

Elections aux Etats-Unis

Le nombre de sièges alloués à chaque État à la **chambre des représentants** est **proportionnel** à sa population. Un exemple : 4 états : **A, B, C, D**. Population totale : **10.000** habitants, nombre de sièges : **323**. (1 élu : 10000/323 = 30,9597…)

Etat	Population	Sièges…	Sièges	Restes
A	5670	183,141	183	0,141
B	3850	124,355	124	0,355
C	420	13,566	13	0,566
D	60	1,938	1	0,938
Totaux	10000	323	321	2

- **A cause des arrondis, il reste 2 postes non alloués. Dans quels Etats iront-ils ?**

La méthode du plus fort reste

La prise en charge des arrondis a été effectuée selon plusieurs méthodes au cours de l'histoire du pays. Exemple avec la méthode du plus fort reste (en 1880) : ***323 sièges, il reste 2 sièges à allouer. Les 2 plus forts restes récupéreront 1 siège chacun.***

Etat	Population	Sièges...	Sièges (1)	Restes	Partage	Sièges
A	5670	183,141	183	0,141	0	183
B	3850	124,355	124	0,355	0	124
C	420	13,566	13	0,566	1	14
D	60	1,938	1	0,938	1	2
Totaux	10000	323	321	2	2	323

Paradoxe de l'Alabama

- Après le recensement de 1880, C. W. Seaton, chef de service au bureau du recensement, effectua des **simulations** du nombre de sièges à affecter à chaque État pour des chambres dont la **taille varierait entre 275 et 350 sièges**.
- **Il découvrit alors que l'État de l'Alabama se verrait attribuer 8 sièges pour une chambre de 299 représentants et seulement 7 sièges pour une chambre de 300 !!!**

Illustration du paradoxe de l'Alabama

323

Etat	Population	Sièges...	Sièges (1)	Restes	Partage	Sièges
A	5670	183,141	183	0,141	0	183
B	3850	124,355	124	0,355	0	124
C	420	13,566	13	0,566	1	14
D	60	1,938	1	0,938	1	2
Totaux	10000	323	321	2	2	323

324

Etat	Population	Sièges...	Sièges (1)	Restes	Partage	Sièges
A	5670	183,708	183	0,708	1	184
B	3850	124,740	124	0,740	1	125
C	420	13,608	13	0,608	0	13
D	60	1,944	1	0,944	1	2
Totaux	10000	324	321	3	3	324

Avec 323 sièges, l'Etat C en obtient 14.

Avec 324 sièges, l'Etat C en obtient 13.

Illogique !!! Paradoxe de l'Alabama.

Explication du paradoxe

- **Dans le cas considéré, ce phénomène s'explique par le fait qu'augmenter le nombre total de sièges à pourvoir accroît d'autant plus vite l'allocation exacte que la population d'un État est importante.**
- **En effet, si on note S le nombre total de sièges, P la population d'un État et T la population totale, l'allocation pour cet Etat est donnée par S × P / T : accroître S d'une unité conduit cette valeur à augmenter de P/T, augmentation d'autant plus grande que P est importante. Ici, les États A et B, d'une population environ 10 fois plus importante que l'État C, profitent de cette situation.**
- **Pour éviter ce paradoxe, d'autres systèmes de répartition ont été inventés, comme la méthode de la plus forte moyenne pour élire un représentant.** (On simule l'addition de 1 poste de plus à chaque Etat, on calcule la moyenne nombre d'électeurs / nombre de sièges, on donne le poste à l'Etat qui a la plus forte moyenne…)