GAUSS

Le Prince des mathématiciens

Jean CEA

Johann Carl Friedrich Gauss

- **Johann Carl Friedrich Gauss, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. (Wikipédia)**
- **Famille assez pauvre, mère illettrée. Travail acharné de son grand-père et de son père. En effet, pour être citoyen de Brunswick et bénéficier de *certains avantages*, il fallait être propriétaire d'un appartement.**

(image sur Wikimedia)

Théorèmes de Gauss

- **Théorème des nombres triangulaires de Gauss, ou « théorème eurêka » ;**
- **Théorème de Gauss sur la fonction digamma ;**
- **Theorema egregium de Gauss sur la courbure des surfaces ;**
- **Théorème de d'Alembert-Gauss, affirmant que les nombres complexes forment un corps algébriquement clos ;**
- **Théorème de Gauss-Wantzel, établissant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone régulier soit constructible à la règle et au compas ;**
- **Théorème de Gauss-Lucas, qui énonce que les racines du polynôme dérivé sont situées dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines du polynôme d'origine ;**
- **Théorème de Gauss-Bonnet, liant des caractéristiques géométriques et topologiques d'une surface ;**
- **Théorème de Gauss-Markov en statistiques ;**
- **En électromagnétisme, un théorème de Gauss reliant le flux d'un champ électrique à travers une surface et la répartition des charges électriques ;**
- **En mécanique, l'analogue gravitationnel du théorème de Gauss en électromagnétisme.**

Lemmes de Gauss

- **Lemme de Gauss en arithmétique élémentaire, généralisant le lemme d'Euclide sur la divisibilité ;**
- **Lemme de Gauss concernant l'arithmétique des polynômes ;**
- **Lemme de Gauss en théorie des nombres, utilisé dans certaines preuves de la loi de réciprocité quadratique ;**
- **Lemme de Gauss en géométrie riemannienne qui étend la propriété d'isométrie locale à celle d'isométrie radiale de l'application exponentielle.**

➢ **Sans compter les innombrables méthodes de Gauss pour résoudre les problèmes les plus variés !**

« **Au prince des mathématiciens** »
Un an après sa mort, Gauss aurait eu **79 ans**

La qualité extraordinaire de ses travaux scientifiques était déjà reconnue par ses contemporains.

Dès 1856, le roi de Hanovre fit graver des pièces commémoratives avec l'image de Gauss et l'inscription *Mathematicorum Principi* (« au prince des mathématiciens » en latin).

Gauss n'ayant publié qu'une partie de ses découvertes, la postérité découvrit surtout l'étendue de ses travaux lors de la publication de ses *Œuvres*, de son journal et d'une partie de ses archives, à la fin du xix^{ème} siècle.

http://topodominique.over-blog.com/pages/Carl_Friedrich_Gauss-824904.html

Un livre intéressant parce qu'il met en scène Gauss dans son époque, à Brunswick et à Göttingen, avec ses deux épouses successives, ses six enfants, ses amis et sa passion pour les mathématiques. Naturellement, il est aussi question de sa créativité exceptionnelle.

Une révolution de la théorie des nombres
Gauss
Génies Mathématiques
RBA

La collection est parrainée par Etienne GHYS

Un enfant stupéfiant : 3 ans

- **Premier « Miracle ».**
- **Son père faisait ses comptes à haute voix**. A la fin, quand il annonça le total, **le petit Gauss corrigea le résultat !**
- Stupéfaction du père, il recompte et trouve que son fils a raison.
- Incrédulité du père : qui a lui appris à compter ? Personne ! Le mystère n'a jamais été éclairci.
- Mais, Gauss s'en souviendra pendant toute sa vie, il en parlera à plusieurs reprises.

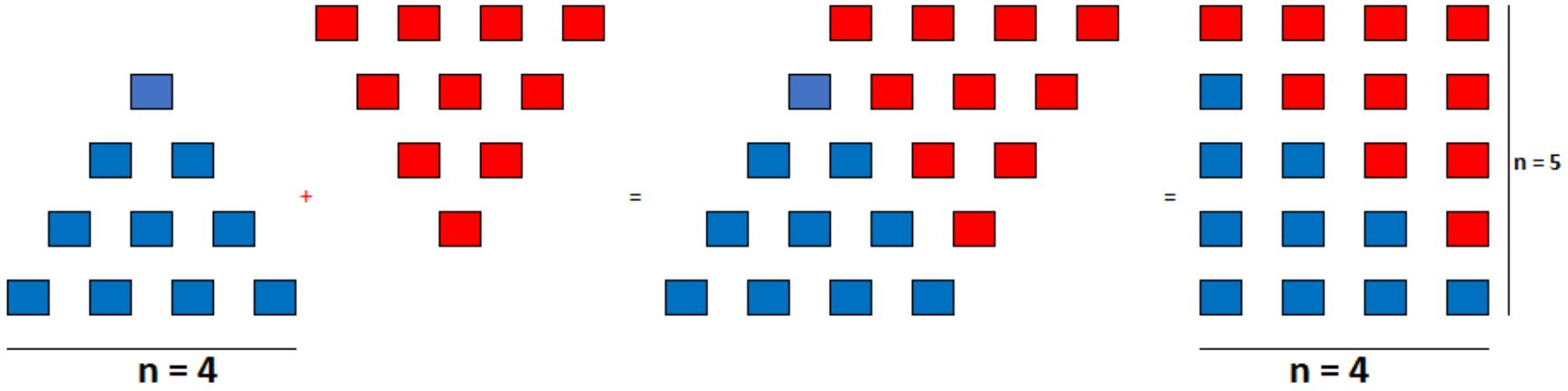
La somme des 100 premiers nombres entiers : 9 ans

- **Deuxième « miracle »,** il allait à l'école communale près de chez lui. Le maître qui avait plusieurs niveaux dans sa classe voulait disposer d'un peu de temps pour gérer quelques problèmes administratifs. Il pensait occuper les « petits » avec le problème suivant, facile à énoncer : **quelle est la somme des 100 premiers nombres entiers ?** (1 + 2 + 3 … + 98 + 99 + 100).
- Pour le jeune Gauss, ***problème posé, problème résolu*** : il écrivit quelque chose sur son ardoise et la posa sur la table du maître en disant « La voici ». Le maître ouvrit des yeux ronds et regarda le résultat avec stupéfaction : **5050**.
- ***C'était bien la somme des 100 premiers nombres entiers !***

Le calcul de la somme des 100 premiers nombres entiers (I)

- On ne connait pas avec certitude la technique employée par Gauss. Il est possible que ce soit celle des *nombres triangulaires* : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55… (autrement dit la suite des sommes S_n = 1+ 2+ 3 + .. + n).

Dessin avec n = 4



$2.S_n = n.(n+1)$

$S_n = n.(n+1)/2$

$S_{100} = 100.(100+1)/2 = 5050$

$2.\ S_4 = 4.(4+1)$

Le calcul de la somme des 100 premiers nombres entiers (II)

Peut-être la plus simple des méthodes (très voisine de la précédente) :

$S_n = \mathbf{1} + 2 + 3 \ldots + (n-2) + (n-1) + \mathbf{n}$

$S_n = n + (n-1) + (n-2) \ldots + 3 + 2 + 1$

$2.S_n = (n+1) + (n+1) \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$

$\mathbf{2.S_n = n . (n + 1)}$

$\mathbf{S_n = n . (n + 1) / 2}$

Le calcul de la somme des 100 premiers nombres entiers (III)

(*) $S_n = n . (n + 1) / 2$

Méthode par récurrence : on veut démontrer que la relation (*) est vraie pour tout entier n positif n > 0.

Est-elle vraie pour n = 1 ? OUI : $s_1 = 1$

On va maintenant démontrer ceci :

(*) est vraie pour n (>= 1) → (*) est vraie pour n+1

Démonstration évidente : hypothèse **$S_n = n . (n + 1) / 2$ Calculons S_{n+1}**

$S_{n+1} = S_n + (n+1) = n . (n + 1) / 2 + (n + 1) = (n + 1)(n / 2 +1) = (n + 1)(n + 2)/2$

CQFD

On a vu que la relation (*) est vraie pour n = 1. Donc elle est vraie pour 2, puis pour 3, puis pour 4 … et ainsi de suite pour tous les nombres entiers.

Le Duc de Brunswick finance ses études : 14 ans

- **Toute la ville parle du jeune prodige. Sa réputation arrive chez le Duc de Brunswick. En 1791, Gauss est convoqué, le duc est subjugué par une telle intelligence. Il décide de surveiller le déroulement de sa carrière, et surtout, il s'engage à financer ses études. Il respectera son engagement.**

- **Heureuse initiative, car le père Gauss voulait, lui, que Johann Carl Friedrich arrête ses études et travaille afin d'améliorer les finances de la famille (contrairement à l'avis de la mère).**

Théorème des nombres premiers : 15 ans

- **Le nombre π(x) de nombres premiers inférieurs ou égaux à x est équivalent, lorsque le réel x tend vers +∞, au quotient de x par son logarithme népérien : soit**

$$\pi(x) \sim x/\ln(x)$$

c'est-à-dire, que le rapport de ces 2 expressions a pour limite 1 lorsque x tend vers l'infini. Il y a donc un nombre infini de nombres premiers.

- **Le théorème des nombres premiers a été conjecturé dans la marge d'une table de logarithmes par Gauss en 1792 ou 1793 alors qu'il avait seulement 15 ou 16 ans (selon ses propres affirmations ultérieures) et par Adrien-Marie Legendre (ébauche en 1797-1798, conjecture précise en 1808).**
- **Le Russe Pafnouti Tchebychev a établi en 1852 que si *x* est assez grand, π(*x*) est compris entre 0,921*x*/ln(*x*) et 1,106*x*/ln(*x*).**
- **Le théorème a finalement été démontré indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896 à l'aide de méthodes d'analyse complexe.**
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_nombres_premiers

Le cheminement de GAUSS à 15 ans

- Il était au Collegium Carolinum et avait fréquenté assidument la bibliothèque.
- Il disposait déjà de listes **plusieurs milliers de nombres premiers** (crible d'Ératosthène ?) et des **tables de logarithmes** !
- Notation : **π(n) = nombre de nombres premiers <= n.**
- Il fit des comptes : π(**10**) = 4 π(**100**) = 25 π(**1000**) = 168 et ainsi de suite jusqu'à π(**10 000 000**) = 664.579. Ensuite, il calcula la distance moyenne entre les nombres premiers de chaque groupe et surtout son augmentation. Les dernières augmentations des distances moyennes semblaient converger vers **2,31**. Lien entre multiplication par 10 et augmentation de 2,31 : les **logarithmes** , plus particulièrement le **logarithme népérien ln(10) = 2,303**
- **La formule suivante : π(x) ~ x/ln(x) ne sera pas publiée mais annotée sur la table de logarithmes car Gauss n'avait pas une démonstration, c'était une conjecture seulement ! Il n'aimait pas ça !**
- **Ce prince, ce gamin n'avait que 15 ans ! En classe de troisième ?**

Gauss et les congruences

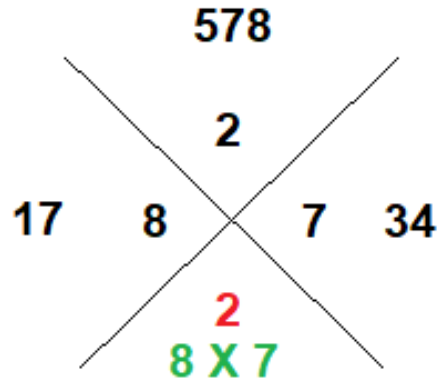
- **La congruence sur les entiers est une relation pouvant unir deux entiers. Elle fut pour la première fois étudiée en tant que structure par le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss à la fin du xviiie siècle et présentée au public dans ses Disquisitiones arithmeticae en 1801. Elle est aujourd'hui couramment utilisée en théorie des nombres, en algèbre générale et en cryptographie. Elle représente le fondement d'une branche mathématique appelée arithmétique modulaire.**
- **C'est une arithmétique où l'on ne raisonne pas directement sur les nombres mais sur leurs restes respectifs par la division euclidienne par un certain entier : le module qui sera noté n. On parle alors de congruence.**
- **Deux entiers relatifs *a* et *b* sont dits congrus modulo *n* si leur différence est divisible par *n*, c'est-à-dire si *a* est de la forme *b + kn* avec *k* entier.**
- **Par exemple : 26 ≡ 12 (7) car 26 – 12 = 14, multiple de 7 (définition ci-dessus)**. On a aussi, **26 ≡ 19 ≡ 12 ≡ 5 (7)**
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Congruence_sur_les_entiers

La preuve par neuf

- **En arithmétique, la preuve par neuf est une technique permettant de vérifier un calcul mental ou effectué « à la main ». Malgré son nom, cette technique n'est pas une preuve mathématique, car elle peut montrer seulement qu'un résultat est erroné. Si la technique ne trouve pas d'erreur, elle ne permet pas de conclure que le résultat est correct.**
- **Le principe général est de refaire le calcul beaucoup plus simplement, en remplaçant chaque nombre supérieur ou égal à 10 par la somme de ses chiffres, de façon répétée.**
- **Cette technique est en fait une application des propriétés de l'arithmétique modulaire puisqu'elle revient à calculer modulo 9.**
- **Exemple :**
- **$253 = 2.100+5.10+3.1 = 2.(99+1)+5.(9+1)+3.1 \equiv 2+5+3 = 10 \equiv 1 \ (9)$**

La preuve par neuf : un exemple

- **Pour la multiplication : supposons que nous ayons calculé 17 X 34 = 578. On a : 17 ≡ 8, 34 ≡ 7, 578 ≡ 2 (9). On place 17, 8, 34, 7, 578, 2 dans la croix de la preuve par 9. Maintenant, on un nombre congruent à 8 X 7 = 56 ≡ 11 ≡ 2 (9). C'est encourageant !**
- **Dans cet exemple, nous avons trouvé les nombres 2 congru à 578 et 2 congru à 56, le résultat de la multiplication est correct au niveau des nombres congrus ; il peut être juste au niveau des nombres.**
- **Si on avait trouvé 588, ce nombre aurait conduit à 5+8+8 = 21 = 3 (modulo 9). On aurait détecté une erreur !**
- **Pour l'addition, on procède de la même façon.**
- **Méthode introduite par Adam Riese (1492-1559)**



Un commentaire sur la théorie des nombres

Les méthodes d'investigation purement arithmétiques (science du nombre, du grec arithmos = nombre) en théorie des nombres ne suffisent plus aujourd'hui au regard de la complexité des sujets étudiés… On considère que Dirichlet, qui succéda à Gauss à Göttingen, est le fondateur de cette branche moderne et féconde de la théorie des nombres.

Pour les mathématiciens grecs, l'arithmétique fut l'étude des entiers et des rationnels (fractions) en rapport avec la géométrie... Depuis plus de 400 ans, les nombres premiers sont des stars incontestés et on est loin d'avoir percé tous les secrets de leur beauté. Outre l'aspect purement mathématique, avec la volonté de résoudre des problèmes anciens non résolus (conjecture de Goldbach, 1742 : Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers**), ils ont trouvé un nouveau champ d'application dans la cryptographie … et dans les problèmes de confidentialité liés aux télécommunications et à l'Internet.**

Nos compliments et nos remerciements à Serge MEHL

http://serge.mehl.free.fr/anx/arith_gauss.html Le site contient énormément d'informations, de très nombreux exemples.

Une trouvaille qui va orienter la recherche de Gauss vers les mathématiques : 19 ans

En vacances à Göttingen, **Gauss s'intéresse à l'équation $x^{17} - 1 = 0$.** *Il ne connaissait pas le futur théorème de Gauss* qui dira que cette équation a 17 racines ou solutions, encore moins que ces racines complexes sont uniformément réparties sur le cercle.

Il débouche sur le polygone régulier à 17 côtés. Il arrive à le construire à la « manière grecque », *avec la règle et le compas*. C'était le 29 mars 1796.

- **A 24 ans, il établira le lien entre les polygones réguliers et les nombres de Fermat :** un **nombre de Fermat** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $((2)^2)^n + 1$, avec *n* entier naturel. Notation : $F_n = ((2)^2)^n + 1$ (voir Wikipedia).
- Ces nombres doivent leur nom à **Pierre de Fermat**, qui émit la ***conjecture que tous ces nombres étaient premiers***. Cette conjecture se révéla **fausse**, F_5 étant composé, de même que tous les suivants jusqu'à F_{32}. On ne sait pas si les nombres à partir de F_{33} sont premiers ou composés. Les seuls nombres de Fermat premiers connus sont donc F_0, F_1, F_2, F_3 **et** F_4, **disons 3, 5, 17, 257, 65537**

Une trouvaille qui va orienter la recherche de Gauss vers les mathématiques : 19 ans

- **Le théorème de Gauss-Wantzel** établit un lien entre ces nombres et la construction à la règle et au compas des polygones réguliers. **Un polygone à n côtés est constructible si et seulement si n est :**

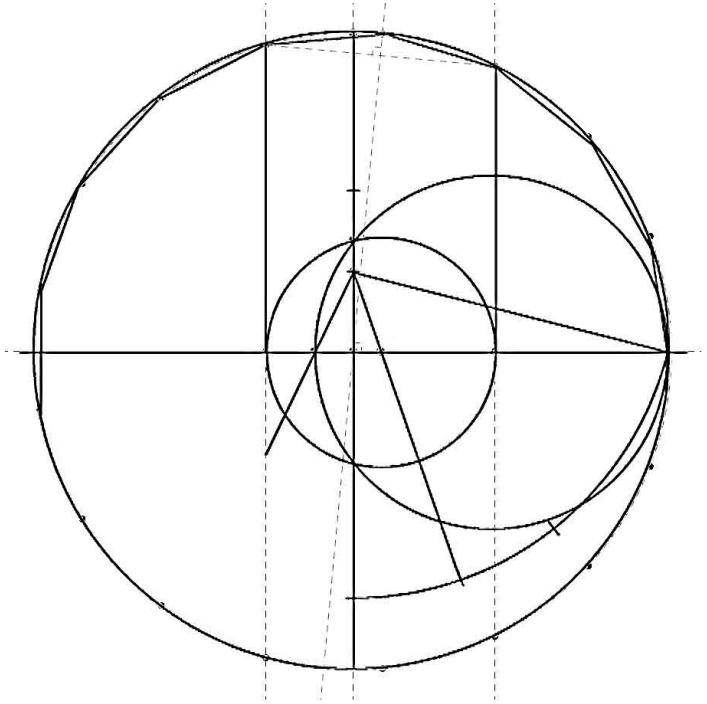
  - soit une puissance positive de 2,

  - soit le produit d'une puissance de 2 (éventuellement $2^0 = 1$) **par un nombre fini** (positif) **de nombres de Fermat premiers tous différents.**

- **[Polygones constructibles : n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, ...]**
- **[Polygones non constructibles : n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25,...]**

Problèmes de quadrature de trisections… **Exemple : division de 2π par n ? Cas n = 6, n = 18, trisection de $\pi/3$? NON ! Sinon, on pourrait construire $\pi/9$ ou $2\pi/18$ et le polygone avec 18 cotés serait constructible…**

Heptadécagone : polygone régulier à 17 cotés Constructible à la règle et au compas



https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fichier:Heptadecagone.jpg

Gauss demanda qu'un heptadécagone régulier soit gravé sur son tombeau. Ce que le ferronnier ne saura pas faire.

La construction de l'heptadécagone est détaillée la site de Thérèse Eveilleau (magnifique site de vulgarisation mathématique, à visiter et revisiter !) :
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/polygones_5_15_17.htm

Et le zéro arriva !

- Au début, l'homme a disposé des seuls nombres « naturels » : les entiers 1, 2, 3… Puis **Bramagupta** et quelques autres indiens inventèrent le zéro (**628** après JC).
- Les musulmans arrivés au bord de l'Indus (et à Gibraltar) en 711 vont envahir l'Inde et s'emparer du livre de Bramagupta. Cet ouvrage ira à la Maison de la Sagesse de Bagdad (***bayt al-hikma****) où il sera traduit en arabe.*

- **Al-Khwarizmi** (780-850) va se saisir du zéro, **invente l'algèbre** et publie un immense livre : ***Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison.*** On va pouvoir parler d'équations, et elles seront nombreuses ! *Abû Ja`far Muhammad ben Mûsâ* **al-Khawârizmî** passa la plus grande partie de sa vie à Bagdad, sous le patronage du calife **Al-Ma'mûn**.

- Au préalable, faisons un rapide rappel sur les notations en algèbre.

Importance des lettres , des signes… en mathématiques

- **Diophante (2 ou 3 siècles avant J.C.) : quand il travaillait avec une inconnue mathématique, il la désignait par le mot « arithmos » qui veut dire « nombre ».**
- **Al-Khawarizmi (780-850) nommait l'inconnue chaï, ce qui signifie « la chose ». Les Andalous, alors sous influence arabe, écrivaient ce mot en caractères latins *xay*.**
- **Viète (1540-1603) : La publication de son livre phare *Isagoge Artem Analycitem* marque en 1591 le début de la révolution algébrique avec les notations de l'algèbre contemporaine. Il est le premier mathématicien à noter les paramètres d'une équation par des symboles. Il fonde ainsi l'algèbre nouvelle avec la façon actuelle de mener les calculs symboliques.**
- **Descartes (1596-1650) préféra le premier les lettres du début de l'alphabet *a, b, c, d*… pour les nombres connus (paramètres) et celles de la fin pour les *inconnues x, y, z*. C'est lui qui met en place les notations modernes que nous connaissons en algèbre, comme par exemple l'exposant pour les puissances. (Wikipedia)**

- **Problème : *un homme a deux ans de moins que sa femme, qui est trois fois plus âgée que leur fils. Celui-ci a deux ans de plus que sa sœur. À eux tous, ils ont 100 ans.***
- ***Âges des membres de la famille ? x = âge du fils: (x) + (3x) + (3x-2) + (x-2) = 100 → x =* âge du fils = 13**
- **On peut essayer de résoudre ce problème avec x ou sans x ! (Singapour ?)**

- **Hervé Lehning** https://www.futura-sciences.com/sciences/questions-reponses/mathematiques-mathematiques-vient-x-8139/

Quand les équations ont besoin de nombres très divers

- **$X + 2 = 0$** avec les **entiers naturels**, cette équation n'a aucune solution. Il faut introduire des nombres **entiers négatifs** comme -2
- **$3.X = 4$** avec les nombres entiers positifs ou négatifs, cette équation n'a pas de solution. Il faut introduire les **nombres rationnels** comme 4/3 autrement dit p/q, p et q entiers, q différent de 0.
- **$X^2 = 2$** avec les nombres rationnels, cette équation n'a pas de solution, il faut introduire les **nombres irrationnels** comme $\sqrt{2}$.
- **$X^2 = -1$** avec les nombres irrationnels, cette équation n'a pas de solution, il faut introduire les **nombres imaginaires** comme i : **$i^2 = -1$**
- **A chaque ensemble, on a ajouté d'autres nombres pour que des équations nouvelles aient des solutions :**

N : entiers naturels, Z : entiers positifs ou négatifs avec 0, Q : nombres rationnels, R : nombres réels, C : nombres imaginaires.

Équations et solutions

- Une équation **$(x-2)(x^2 - 9) = 0$**

Si on développe les opérations qui figurent dans l'équation et on est conduit à :

$x^3 - 2.x^2 - 9.x + 18 = 0$

L'exposant le plus élevé est dit **le degré de l'équation**, ici degré **3**. On sait que

$x^2 – 9 = (x-3).(x+3)$, donc l'équation s'écrit : **$(x-2).(x+3).(x-3) = 0$**

Ses solutions ou racines (les nombres x qui…) sont **$x = 2$**, **$x = - 3$** et **$x = + 3$**.

(Situation : **un produit de facteurs est nul**. Raisonnement)

- On est tenté de dire : **toute équation de degré 3 a 3 racines** ou solutions, puis dire la même chose avec un entier positif n au lieu de 3.
- Que penser de l'équation : **$(x-5).((x-2)^2 + 9) = 0.$** On cherche les racines de $(x-5) = 0$ et

$((x-2)^2 + 9) = 0$? Cette dernière s'écrit : **$(x-2)^2 = - 9$**. Elle n'a pas de solutions dans les nombres réels (un carré est positif ou nul). Par contre $x = 5$ est toujours une racine. Donc, il y a une racine ou trois ? Que disaient les mathématiciens qui ne connaissaient pas les nombres imaginaires ? Solutions de $(x-2)^2 + 9 = 0$ **$x = 2 + 3.i$** **$x = 2 - 3.i$**

Théorème fondamental de l'algèbre : 22 ans

Il s'agit de la thèse de Gauss, il n'a que 22 ans. Il ne soutiendra pas la thèse, étant trop occupé par ailleurs. C'est sa première démonstration. Il en fournira d'autres : 4.

Ce théorème est dit ***Théorème de d'Alembert-Gauss. Il concerne les racines complexes des équations polynomiales à coefficients complexes.*** Quitte à diviser tous les coefficients de l'équation par celui du terme de degré le plus élevé x^n, on peut supposer que le coefficient de x^n est 1. En gros, le théorème dit ceci : tout polynôme de degré n (n >= 1) à coefficients complexes peut s'écrire sous la forme :

$(x-x_n).(x-x_{n-1}).(x-x_{n-2}) \dots (x-x_2).(x-x_1) = 0$ **les x_i sont les racines (complexes), plusieurs de ces racines peuvent être égales. Au total il y en a n (en comptant les multiplicités), comme le degré du polynôme.**

- **Avec Carl Friedrich Gauss les nombres complexes gagnent leurs lettres de noblesse.** Gauss est l'auteur de la première démonstration rigoureuse du théorème fondamental de l'algèbre.
- Dès 1797, il associe au point de coordonnées (*a, b*) le complexe *a* + i*b*. C'est également lui qui popularise la notation d'Euler de **i** pour $\sqrt{-1}$, symbole qu'il utilise dès 1801 dans ses Disquisitiones arithmeticae, et qu'il nomme « unité imaginaire ».
- C'est dans son ouvrage de 1831, *Theoria residuorum biquadraticorum*, qu'il présente son ***plan complexe*** qui est un plan formé de points. **C'est aussi dans cet ouvrage qu'il rebaptise les nombres imaginaires en nombres complexes, qualificatif qui est encore en vigueur actuellement.**
- On lui doit en outre la **notion** de norme et la dénomination de **complexe conjugué**.

L’astéroïde Cérès

Au début de l’an **1801**, l’astronome italien **Giuseppe Piazzi** balayait le ciel depuis son observatoire en Sicile. Il pensait trouver un nouvel astre, une comète entre Mars et Jupiter. Il découvrit le premier **astéroïde**, à qui il donna le nom de « **Cérès Ferdinandéa** » en l’honneur de la déesse protectrice de la Sicile et du roi qui l’avait accueilli en Sicile. Plus tard, pour la communauté astronomique, seul le nom « **Cérès** » sera retenu.

On découvrira par la suite des centaines de milliers d’astéroïdes dans une ceinture entre Mars et Jupiter. Il s’agit de résidus qui ne se sont pas agglutinés pour former des nouvelles planètes.

Cérès est le plus grand astéroïde, c’est une « planète naine ».

Révolution autour du soleil : 1 680 jours = 4,6 années terrestres.

Diamètre : 974 km

Gravité : 0,27 m/s^2 à comparer à 9,81 m/s^2 pour la terre.

Gauss retrouve l'astéroïde Cérès *:* 24 ans

L'astronome Piazzi suivit avec passion l'astéroïde pendant une **quarantaine de jours**. Il nota avec rigueur les **diverses positions** de ce corps céleste. *Ensuite la trajectoire de l'astre, orientée vers le soleil, l'empêcha de faire de nouvelles mesures.*

Giuseppe Piazzi mit ses **données à la disposition de tous les astronomes**. Le problème qui se posait alors était de savoir quel type de trajectoire suivait l'astéroïde : l'hypothèse de l'ellipse était la plus intéressante.

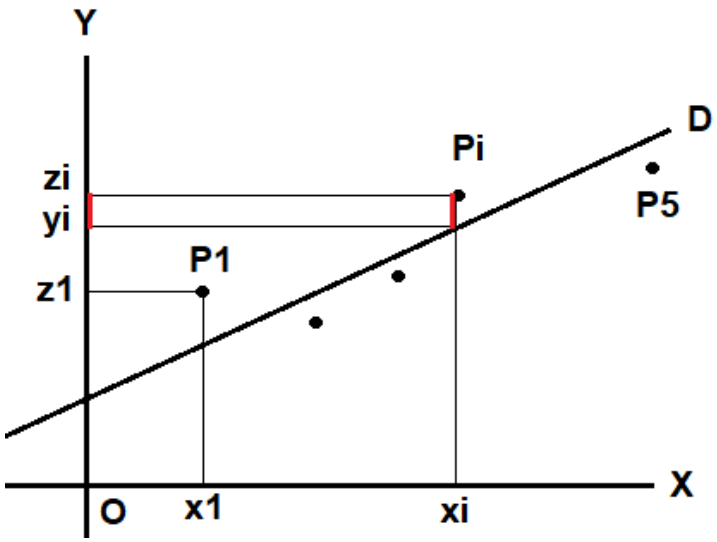
Le problème consistait à trouver la trajectoire à partir des relevés de Piazzi. Et puis, cela va de soi, quand et où Cérès serait observable de nouveau ?

Astronomes et mathématiciens s'attelèrent à la tâche, mais ce fut un **échec**. L'astronome allemand nommé **von Zach** pensa alors au jeune prodige de **Göttingen (qui avait 24 ans) : il lui transmit les mesures de Piazzi. En 3 mois le problème sera résolu.** Et, suivant les directives de Gauss, von Zach retrouvera l'astéroïde à la fin de l'année 1801. Les astronome ne cherchaient pas l'astéroïde à la bonne place. Excentricité de la trajectoire plus grande que prévue !

La méthode utilisée deviendra célèbre.

La méthode des moindres carrés (I)

Le problème : à partir d'un nuage de points, reconstruire une trajectoire. Ou encore, on donne n points, on cherche une courbe (une surface) qui passe au plus près de ces points. Pour simplifier, nous allons nous limiter à un nuage de n points situés dans le plan : les points P_i de coordonnées xi , zi pour i variant de 1 à n.



- ***Nous cherchons une droite D d'équation***
  y = a.x + b *qui passe au plus près de ces points.*

***Clairement les ordonnées z_i sont le résultat de mesures et sont entachées d'erreurs. En général, on n'a pas* zi = a. xi + b** (**P_i n'est pas sur D**), **on voudrait que tous ces écarts zi – y_i *ou* (zi – a.xi – b) soient proches de zéro pour tout i de 1 à n.**

On pourrait poser J(a,b) = $\sum_1^n$(zi – a.xi – b) et chercher à minimiser J(a,b). Ce choix est mauvais, car les écarts peuvent être très grands et s'équilibrer algébriquement.

La méthode des moindres carrés (II)

- **Gauss a fait le choix suivant : $J(a,b) = \sum_1^n (zi - a.xi - b)^2$**

Avec l'élévation au carré, si $J(a,b) <= \varepsilon$ alors tous les écarts (au carré) sont inférieurs à ε puisque nous avons à faire à des nombres positifs.

Gauss s'est ramené à un problème d'optimisation :

- **Trouver a,b tels que $J(a,b) <= J(c,d)$ pour tous c,d**

Les mathématiciens ont plusieurs méthodes pour résoudre ces problèmes.

Il s'agit souvent de méthodes itératives, en voici une qui porte le nom de Gauss (et de Seidel). Nous sommes à l'étape n, nous avons calculé a_n et b_n. Nous allons calculer $a_{(n+1)}$ puis $b_{(n+1)}$ il s'agira de problèmes à une variable.

Calcul de $a_{(n+1)}$: $J(a_{(n+1)}, b_n) <= J(c, b_n)$ pour tout c

Calcul de $b_{(n+1)}$: $J(a_{(n+1)}, b_{(n+1)}) <= J(a_{(n+1)}, d)$ pour tout d

La méthode des moindres carrés (III)

Gauss a fait le choix suivant : $J(a,b) = \sum_1^n (zi - a.xi - b)^2$

Ce cas particulier justifie le titre (moindres carrés) et est facile à résoudre : on écrit que les 2 dérivées

$J'_a(a,b)$ et $J'_b(a, b)$ sont nulles au minimum J(a,b).

On obtient 2 équations à 2 inconnues a et b.

$$J'_a(a,b) = \sum_1^n 2.(zi - a.xi - b)(-xi) = 0$$

$$J'_b(a,b) = \sum_1^n 2.(zi - a.xi - b)(-1) = 0$$

Autres utilisations de la méthode des moindres carrés (I)

- **Faire un prévisionnel** (ou une extrapolation vers le futur, après le nuage de points) :
- Créer un nuage de points en utilisant les informations du passé.
- Trouver la droite (ou une autre courbe) cherchée, dite **droite de régression**.
- Se positionner sur la droite à l'abscisse voulue dans le futur : jour, mois, année, c'est-à-dire extrapoler les données connues pour prévoir le futur. **On s'intéresse donc à des points de la courbe à droite du nuage.**
- Le mot « Régression » vient du milieu des **statisticiens**. Dans une étude statistique sur l'évolution de la taille d'une population, Francis Galton s'est rendu compte que cette taille baissait, « statistiquement », autrement dit « elle régressait ».

Autres utilisations de la méthode des moindres carrés (II)

Trouver des conditions initiales.

- Même technique que dans l'exemple précédent, mais cette fois-ci, on s'intéresse donc à des points de la courbe à gauche du nuage de points.
- Ce problème peut se poser **lorsque les conditions initiales d'un mobile ne sont pas connues avec précision**. Par exemple, au démarrage, la position d'une fusée est bien connue, mais sa vitesse peut manquer de précision ce qui peut être gênant pour déterminer sa trajectoire. Des mesures faites en plusieurs temps différents peuvent permettre par une extrapolation vers le passé de préciser les conditions initiales de la fusée.

Autres utilisations de la méthode des moindres carrés (III)

Systèmes dans lesquels il y a plus d'équations que d'inconnues.

Considérons le système de 3 équations à 2 inconnues :

$$2x + 3y = 5$$
$$x - y = 5$$
$$x + y = -1$$

- A l'aide des 2 premières équations, on trouve $x = 4$ et $y = -1$. Si on essaie de reporter ces valeurs dans la troisième équation, on est conduit à l'absurdité $4 - 1 = -1$. La probabilité pour que la solution de 2 équations vérifie une troisième équation est pratiquement nulle.
- **On est conduit à chercher des valeurs de *x* et *y* pour lesquelles les équations sont satisfaites « au mieux ».**
- Pour cela, posons :

$$\mathbf{E}(x, y) = [(2x + 3y - 5)^2 + (x - y - 5)^2 + (x + y + 1)^2]$$

- Comme dans le cas de la recherche de la trajectoire de Cérès, on est conduit à chercher *x* et *y* solutions d'un problème de minimisation :

Trouver x,y tel que **$E(x, y) \leq E(x', y')$ pour tout x' et y'**

- On est toujours dans la technique des « moindres carrés » !

Paternité de la méthode des moindres carrés

Il y eut une querelle de paternité entre l'allemand **Gauss** et le français **Adrien Marie Legendre** (1752-1833).

Legendre fit une publication sur le sujet en **1805**, Gauss ne se décida à publier qu'en **1809** alors qu'il avait déjà utilisé la méthode en 1801, quand il avait 24 ans (Cérès) et peut-être avant.

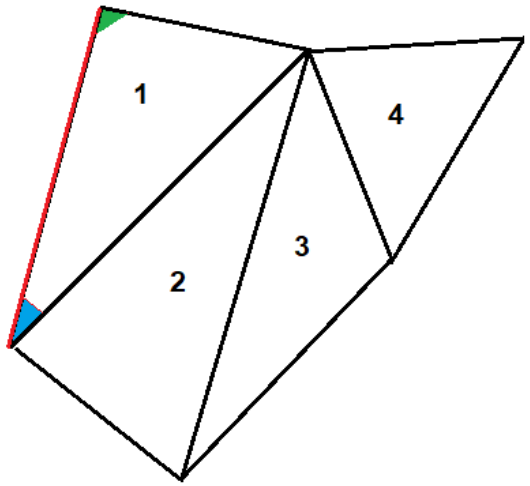
La méthode de calcul proposée par Gauss et Legendre restera célèbre, elle sera connue comme « La méthode des moindres carrés ». Elle sera retenue comme ayant deux pères fondateurs. *Ses nombreuses applications déborderont le cadre des trajectoires des planètes, elles entreront de plein fouet dans les statistiques, les extrapolations, certaines optimisations…*

Du travail à Göttingen : 30 ans

- **Le bienfaiteur de Gauss, le Duc de Brunswick est tué en 1806 lors d'une bataille contre les armées de Napoléon.**
- **Gauss cherche du travail pour gagner sa vie.**
- **En 1807, il devient le directeur de l'observatoire astronomique de Göttingen. Accessoirement, il sera aussi enseignant en astronomie. Mais, il préférait la recherche à l'enseignement. Il aura des élèves brillants dont Bernhard Riemann** (1826 - 1866) **et Richard Dedekind** (1831 - 1916)...
- **En 1809, il publie un important livre sur les corps célestes, en particulier, comment calculer la trajectoire d'une planète.**
- **1810, refus d'une médaille et d'une bourse de l'Institut de France pour protester contre l'occupation de son pays par les troupes de Napoléon. Par contre, il accepte l'horloge astronomique choisie par Sophie Germain.**
- **Il fera beaucoup pour la renommée de Göttingen, il y restera jusqu'à sa mort.**

Priorité à la géodésie et à la cartographie

- L'Europe en ébullition à la suite de la révolution française et des guerres avec Napoléon donne la priorité aux sciences et à la… géodésie. Il fallait une meilleure cartographie pour les militaires et pour les politiques qui voulaient développer l'économie.
- 1818, Gauss est nommé responsable du projet de cartographie du royaume de Hanovre. Il accepte si des moyens lui sont alloués, ce qui sera fait.



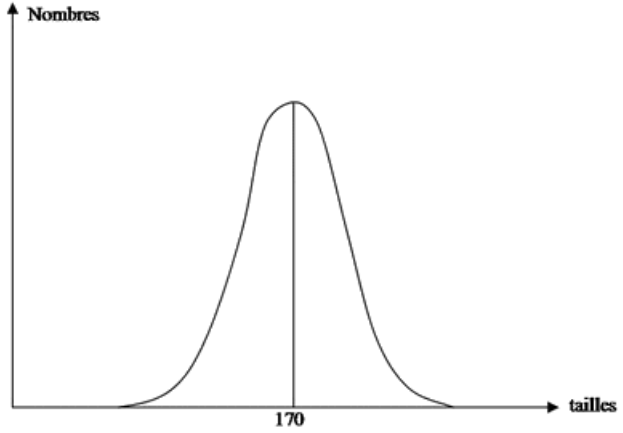
La triangulation est la base de la cartographie. En effet à partir d'un coté (rouge) et de 2 angles (vert et bleu) d'un triangle, on peut construire complètement le triangle, donc la longueur des 2 autres côtés, la position d'un point distant, le 3ème sommet. De proche en proche, à partir d'un triangle, on en construit un autre et ainsi de suite.

Le travail d'un savant

- Gauss s'est totalement investi dans le projet : journées chaudes sur le terrain, journées pluvieuses ou avec brouillard réservées aux calculs trigonométriques. La formule magique est la suivante pour un triangle de sommets A, B, C, de côtés a, b, c, d'angles α, β, γ : **$a/\sin(\alpha) = b/\sin(\beta) = c/\sin(\gamma)$**
- En réalité, c'est plus complexe, car on travaille sur une sphère et pour une meilleure précision, il faut travailler en coordonnées sphériques (Legendre).
- **1825 : Gauss confie le travail de terrain à son fils et se consacre aux calculs, il aurait effectué 1 million des calculs !**
- Conséquences : maîtrise de la méthode des moindres carrés, passage du plan à la sphère (et vice versa, genre Mercator), **maîtrise de la trigonométrie sphérique, introduction des coordonnées paramétriques des surfaces, courbure (de Gauss) des surfaces.**
- Invention de **l'héliotrope** (télescope + miroir pour réfléchir le soleil sur de longues distances).

La courbe en cloche (ou de Gauss)

Dans le domaine des probabilités, le nom de *Gauss* est très célèbre.
Il conçoit une loi statistique continue, appelée **loi normale** ou **loi de Laplace-Gauss**, dont la répartition est représentée par la fameuse courbe en cloche.
L'adjectif « normale » s'explique par le fait que **cette loi décrit et modélise des situations statistiques, aléatoires complexes et naturelles.**



Prenons par exemple une population de 1000 personnes dont la taille moyenne est de 170 cm.
En traçant l'histogramme des tailles, on obtient une courbe en cloche dont la population se concentre essentiellement autour de la moyenne.

https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/mathematiciens-celebres/gauss

Les 2 maximes de Gauss

- **Il n'a jamais été un écrivain prolifique, refusant de publier un travail qu'il ne considérait pas comme complet et au-dessus de toute critique. Cela concordait avec son adage personnel *pauca sed matura* (« parcimonieux mais au point »). Son journal montre qu'il avait fait plusieurs importantes découvertes mathématiques des années, voire des décennies, avant qu'elles ne soient publiées par ses contemporains. Le mathématicien Eric Temple Bell considère que si Gauss avait publié à temps toutes ses découvertes, il aurait fait gagner cinquante ans aux mathématiques.**

- **Il rechignait à présenter l'intuition derrière ses très élégantes démonstrations. Il préférait qu'elles apparaissent comme sorties de nulle part et effaçait toute trace du processus de sa découverte. Il justifie ce choix dans ses *Disquisitiones Arithmeticae*, où il affirme que toute l'analyse (c'est-à-dire les chemins qu'il emprunte pour atteindre la solution d'un problème) doit être supprimée par souci de concision et d'élégance, « de même qu'un architecte ne laisse pas l'échafaudage une fois l'édifice achevé ».**

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Le cerveau d'un génie

- **Le chirurgien Wagner a prélevé le cerveau de Gauss, pensant y trouver la trace de son génie !**
- **Tout ce qu'il put dire est que l'organe pesait 1492 grammes, ce qui est à peine supérieur à la moyenne, et qu'il comportait des circonvolutions très riches.**
- **Il en a même laissé un croquis.**

- http://users.skynet.be/radoux/textes/gauss.pdf

Sophie Germain (1776-1831)

- Elle se prend de *passion pour les mathématiques à l'âge de treize ans*, après avoir lu dans la bibliothèque familiale un chapitre sur la vie d'Archimède (selon Wikipedia).
- Son père est contre, c'est un métier d'homme ! Il lui confisque les chandelles pour l'empêcher de travailler la nuit.
- Elle prend un nom d'emprunt pour obtenir des documents et communiquer avec des mathématiciens : **Antoine Auguste Le Blanc.**
- Elle établit la preuve de la **conjecture de Fermat** pour certains nombres premiers : *p premier tel que 2p+1 soit aussi premier.* (Ex: 3, 5, 11…). Les nombres de Sophie Germain !
- Elle épate **Lagrange** par ses écrits : convoquée, elle doit se démasquer !
- En 1804, elle entre en contact épistolier avec **Gauss**. Deux ans plus tard, Napoléon qui a envahi la Prusse se rapproche de la ville natale de Gauss (Brunswick). Sophie Germain demande au général de l'Empire Pernetty, un ami de la famille, de protéger Gauss. Ce sera fait ! Il lui écrit une lettre émouvante.
- Elle est obligée de se démasquer une seconde fois : la mathématicienne sera finalement acceptée dans ce milieu d'hommes.

Lettre de Gauss à Sophie Germain 30 ans

« … **Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos mœurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés que les hommes à se familiariser avec ces recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur**… »

30 avril 1807.

FIN

Merci beaucoup