ARCHIMEDE

Jean CEA

La Grèce antique

Crédit : le livre scolaire.fr

Quelques célébrités de la Grèce Antique

Thalès (Milet ; -625 : -546)
Pythagore (Samos ; -580 : -495)
Théano (Samos ; VIe av. J.-C.)
Socrate (Athènes ; -470 : - 399)
Hippocrate (Chios ; -470 : -410)
Platon (Athènes ; -427 : -347)
Eudoxe (Cnide ; -408 : -355)
Aristote (Athènes ; -384 : -322)

Euclide (Alexandrie ; environ -365 : -275)
Aristarque (Samos ; -310 : -230)
Archimède (Syracuse ; -287 : -212)
Ératosthène (Alexandrie, -276 : -196)
Apollonios (Perga ; -262 : -180)
Diophante (Alexandrie ; - 214 ; -298)
Ptolémée (Claude, Alexandrie ; + 90 : +168)
Hypatie (Alexandrie ; +370 : +415)

Archimède : l'un des grands savants de l'antiquité, mathématicien, physicien, ingénieur, inventeur génial !

- Il est né à **Syracuse**, dans l'ancienne « ***Grèce Antique*** », vers **287** avant J.C. Il y est mort en **212** lors de la prise de la ville par les romains, il avait **75 ans** ! ***Une aussi longue vie au 3ème siècle avant J.C.***
- Nous ne savons pas grand-chose sur sa vie privée, si ce n'est que son père **Phidias** était un *astronome-mathématicien*.
- Il faisait partie de la « famille » du roi (tyran) **Hiéron de Syracuse** ; en fait, il était embauché comme « ingénieur », chargé entre autres choses, de diriger les défenses de la ville en guerre contre les romains.
- Archimède a probablement suivi des cours dans la célèbre école **d'Alexandrie**, avec des *héritiers d'Euclide*.

Les travaux d'Archimède

- Les travaux d'Archimède sont connus grâce à ses nombreux traités. On en a retrouvé une **douzaine** et on estime que **4 ou 5 autres traités ont disparu**. De plus, nous disposons d'une **correspondance** avec d'autres savants de son époque.
- **Certaines de ses œuvres ont été éditées :** Venise 1543, Bâle 1544, Oxford 1792 et Leipzig fin XIXe siècle. Et puis, *Œuvres d'Archimède* traduites en français avec un commentaire par F. Peyrard ; éd. François Buisson, 1807.

➢ L'histoire des publications d'Archimède aurait pu s'arrêter là, mais un pareil savant ne pouvait pas se contenter d'un parcours aussi classique. Voilà qu'en **1906**, on découvre le ***palimpseste d'Archimède***.

Le Palimpseste d'Archimède

- Il s'agit d'un **parchemin** sur lequel on a écrit au Xème siècle des livres de notre génie. *Par la suite, au XII siècle,* dans un monastère proche de Bethléem, *ce parchemin a été **gratté** et **réutilisé** pour en faire un livre de prières*. Puis, le palimpseste quitte le monastère et réapparaît à Constantinople en 1906. Un philologue, **Johan Ludwig Heiberg** le découvre, le consulte et le photographie (1908). Il constate que le palimpseste contient des œuvres d'**Archimède** ! Le palimpseste disparaît (vers la France semble-t-il), pour réapparaître en 1998, où il est vendu aux enchères chez « Christie's » pour 2 millions de dollars. Finalement, le palimpseste est offert au *Walters Art Museum de Baltimore*.
- A partir de là, les chercheurs utiliseront les techniques les plus élaborées pour retrouver la majeure partie des textes originaux d'Archimède. *Le palimpseste est réorganisé sous la forme d'un de nos cahiers classiques appelé « **Le Codex d'Archimède** ».*

Palimpseste d’Archimède
Codex d’Archimède

Un Codex de 177 folios

Le contenu du palimpseste

- De l'équilibre des figures planes (principe de la mécanique statique, centres de gravités…),
- Des spirales (aires et tangentes),
- De la mesure du cercle (circonférence, aire),
- De la sphère et du cylindre (aires, volumes de domaines construits à partir de sphères et de cylindres),
- *Des corps flottants (le principe d'Archimède, applications),*
- *De la méthode (Archimède nous dévoile sa façon de travailler),*
- *Stomachion (un puzzle !)*
- *Les 3 derniers traités étaient inédits, ils ne figuraient nulle part dans les œuvres d'Archimède,* ***une trouvaille royale*** *!*

➢ Cette belle histoire est racontée avec brio par **Reviel Netz**, responsable de l'équipe qui a reconstitué l'ouvrage et **William Noel** le conservateur du Codex.

William Noel, Reviel Netz, le Codex d'Archimède, JC Lattès, 2008.

Pour vous distraire : un thriller historique et ésotérique d'*Éliette Abécassis, Le palimpseste d'Archimède, Albin Michel, 2013.*

Et puis, un site très détaillé : http://www.mystere-tv.com/l-extraordinaire-histoire-du-palimpseste-d-archimede-v2421.html

Trois expressions célèbres d’Archimède

- **Eurêka !**

  Il vient de découvrir la poussée d’… Archimède.

- **Donnez-moi un point d'appui et un levier, je soulèverai le monde !**

  Il avait découvert la loi qui régit les leviers.

- **Ne dérange pas mes cercles !**

  Phrase prononcée quelques minutes avant d’être tué par un soldat romain.

« Eurêka ! »

*Le roi **Hiéron** de Syracuse avait fourni, disons **un lingot d'or**, à un orfèvre pour qu'il fabrique **une couronne exceptionnelle**.*

Après réalisation, la question se posa de savoir si tout l'or avait été utilisé, et surtout, rien que de l'or. Le Roi demande à Archimède de se pencher sur ce problème.

En prenant un bain, Archimède prend conscience de la poussée de l'eau, le célèbre « **Principe d'Archimède** » est découvert :

« ***Tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et opposée au poids du volume de fluide déplacé*** ». Cette force est appelée **poussée d'Archimède**.

La flottabilité : c'est cette force qui fait flotter des corps : tronc d'arbre, bateau… (densité du corps inférieure à celle du liquide).

- L'histoire dit qu'Archimède est sorti de son bain et qu'il a parcouru **tout nu** les rues de Syracuse en criant « Eurêka ! » (J'ai trouvé !)

Eurêka, la preuve

Une solution du problème :

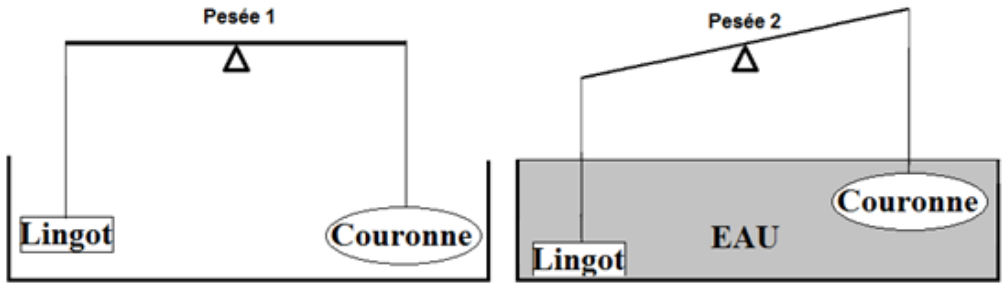
Pesée 1 : on a un équilibre entre un lingot d'or et la couronne. Même poids.

Dessous, une cuvette destinée à recevoir de l'eau.

Pesée 2 : on remplit la cuvette d'eau, deux nouvelles forces entrent en action. Les poussées d'Archimède exercées sur le lingot et sur la couronne. Elles sont dirigées vers le haut et sont égales aux poids des volumes d'eau déplacés. Un déséquilibre apparaît, la couronne monte, le lingot descend, donc ***la poussée est plus importante sur la couronne***.

Autrement dit, la couronne et le lingot ont le *même poids* mais des *volumes différents*. A poids égal, le volume de la couronne est plus grand. ***La couronne n'est pas en or pur.***

Aujourd'hui, on parlerait de densités différentes.



« Donnez-moi un point d'appui et un levier, je soulèverai le monde »

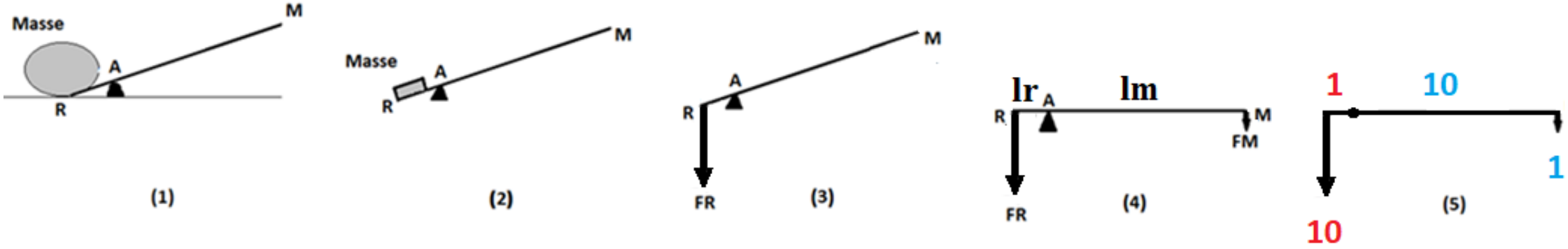
- Quand Archimède découvrit *la loi fondamentale des leviers*, qu'il entrevit l'ampleur des nombreuses applications et des variantes des leviers, il eut un certain vertige et prononça la fameuse phrase. Il faut dire que l'humanité venait de faire un formidable pas en avant. (On trouve dans la littérature plusieurs variantes de cette phrase et même des contestations !).
- Derrière cette affirmation se cache la question suivante :

A l'aide d'une « petite » force peut-on déplacer une masse « importante » ?

➢ *La réponse vient de la nuit des temps : il semble que très tôt, les hommes ont découvert le principe du levier et son* ***effet de démultiplication de la force****.*

Leviers

Les éléments impliqués dans l'effet levier le plus classique :



R : il y a une force de Résistance FR
A : c'est le point d'appui
M : on appliquera une force Motrice FM

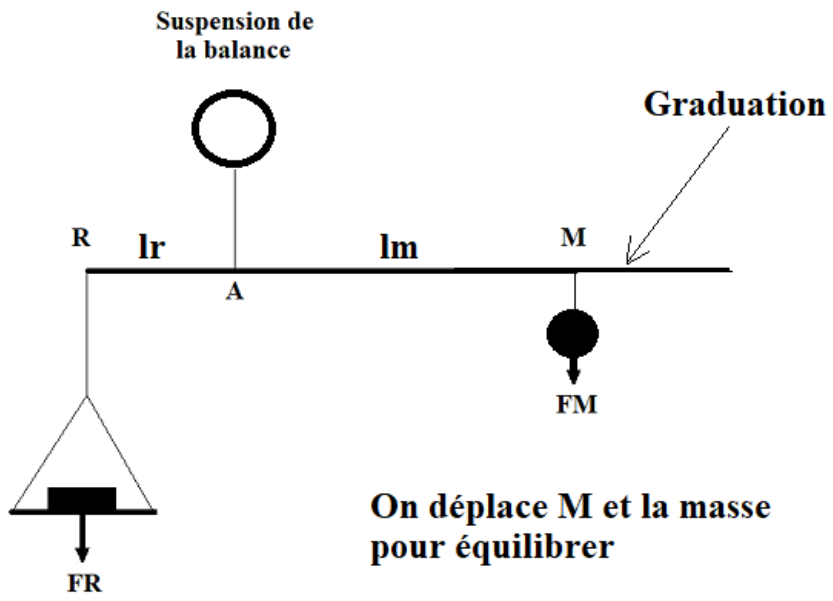
lr : longueur du bras de levier du coté de la résistance
lm : longueur du bras de levier du coté de la force motrice
La loi : 10.1 = 10.1 (1 kilo équilibre 10 kilos)

La **loi d'Archimède** : **à l'équilibre**

FR . lr = FM . lm

Il y a une force de réaction en A

Levier, balance romaine, formule d'Archimède



Principe de la balance romaine : on déplace la masselotte qui engendre la force FM, donc lm varie. A l'équilibre, on lit le poids sur la graduation (rainures) le long du bras AM.

Vérification de la loi d'Archimède

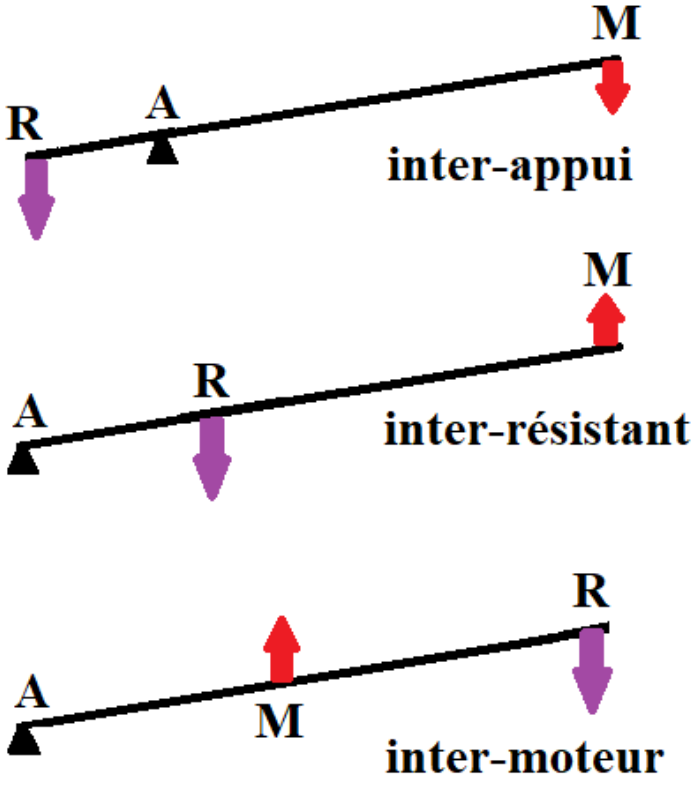
$$FR \cdot lr = FM \cdot lm$$

Étalonnage : on fait plusieurs essais ou on calcule, **lr et FM ne changent pas**. On modifie la masse du plateau, donc, la force FR et *on lit ou on marque lm* sur la graduation.

- **Moments et travaux des forces** : voici une référence montrant simplement ce lien entre forces, moments et travail élémentaire :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_d%27une_force_(m%C3%A9canique

Les 3 types de leviers



Tout dépend de la **position relative des points R, A, M.**

Les utilisations sont très nombreuses.

- **Appui intermédiaire** : un pied-de-biche (1), un arrache-clou, une pince, des ciseaux, un diable(2), un trébuchet (3)…
- **Résistance intermédiaire** : une brouette(4), une clef, un décapsuleur…
- **Moteur intermédiaire** : pincettes (5) (ou brucelles) et autres pinces, chèvre hydraulique (ou grue avec moteur pour soulever) (6), une agrafeuse…

1. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/09/Pied-de-biche_01.jpg
2. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/57/Hand-truck.jpg/100px-Hand-truck.jpg
3. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/ff/Wheelbarrow.jpg/220px-Wheelbarrow.jpg
4. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/9e/Stamp_tongs.jpg/150px-Stamp_tongs.jpg
5. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/1d/Ch%C3%A8vre_hydraulique.jpg/110px-Ch%C3%A8vre_hydraulique.jpg

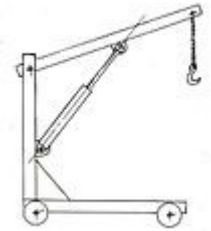
1

2

3

4

5



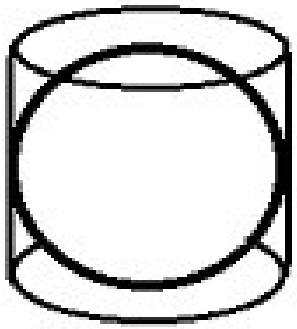
6

Leviers et finances

- **Aujourd'hui, le principe du levier a quitté la vieille technologie pour se confronter au monde de la finance, de la sociologie…**
- **L'effet de levier (financier) est un terme général pour désigner n'importe quelle technique destinée à multiplier les profits ou… les pertes**. Les techniques courantes de levier sont l'endettement, l'achat d'actifs à long terme et les produits dérivés. (selon Wikipédia)
- **Danger** : l'effet de levier permet, grâce à l'emprunt, d'acquérir des actifs avec un minimum de fonds propres, ce qui correspond à se constituer un capital grâce à l'endettement. En revanche, si le taux de crédit est supérieur au taux de rentabilité du projet, on parle **d'effet de massue ou d'effet boomerang** : *la rentabilité des fonds propres s'effondre*. (selon Wikipédia)

« Ne dérange pas mes cercles ! »

En 212 avant J.C., Syracuse assiégée depuis plusieurs années par les romains finit par succomber. Inconscient de ce qui se passait dans sa ville, le vieux génie (75 ans) contemplait une figure géométrique dessinée à même le sol, quand un soldat romain l'interpela. Sa réponse est la phrase célèbre : « Ne dérange pas mes cercles ! » Le soldat tua immédiatement le savant d'un coup d'épée. Et pourtant, le **général Marcellus** qui commandait la flotte romaine avait demandé à ses troupes de protéger Archimède ! ***Notre génie eut droit à des funérailles exceptionnelles.***



Marcellus respectera un vœu du savant : il voulait que sur sa pierre tombale figure le dessin d'une sphère et du cylindre tangent latéralement limité à 2 disques tangents. Le calcul du rapport entre les 2 volumes lui a demandé beaucoup de travail, il s'agit du nombre 2 / 3 qui figurera aussi sur la pierre tombale.

Vœu respecté, mais il y aura mieux !!!

La médaille Fields et… Archimède

La médaille a été dessinée par le médecin et sculpteur canadien R. Tait McKenzie.
Photo : Stefan Zachow

- Depuis 1936
- Tous les 4 ans, 4 médailles au maximum
- Congrès International des Mathématiciens
- Moins de 40 ans
- 15.000 $ canadiens

http://www.mathunion.org/general/prizes/fields/photos/

Médaille avec un portrait d'**Archimède** et une citation en latin du poète Marcus Manilius : « *Transire suum pectus mundoque potiri* », soit « S'élever au-dessus de soi-même et conquérir le monde ».
Au revers, une phrase en latin : *CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE (* « Les mathématiciens rassemblés du monde entier ont récompensé pour des contributions exceptionnelles »).
À l'arrière-plan, une représentation de la tombe d'Archimède, avec la gravure de son théorème « De la sphère et du cylindre » disposée derrière un rameau. **La tranche porte le nom du lauréat**.

… et puis, pour la première fois, une femme va décrocher la « Médaille Fields ». Elle avait 37 ans, moins de 40 ans, c'est la règle !

Congrès international des mathématiciens, Séoul, 13 août 2014.

Maryam Mirzakhani, première femme à décrocher la médaille Fields

Pur produit du système éducatif iranien, Maryam Mirzakhani.

En 1994, elle est la première fille iranienne **médaillée d'or aux Olympiades** internationales de mathématiques. **L'année suivante, elle obtient la note parfaite** : 42 sur 42, et termine numéro un mondial. Le travail intense de sélection et de préparation ainsi que le talent indéniable des élèves iraniens finiront par payer. En **1998**, l'Iran termine **premier** aux Olympiades devant les Etats-Unis.

Le système éducatif iranien est devenu au fil du temps **ultra élitiste**, basé sur une compétition incessante organisée depuis le collège et jusqu'à l'université.

Elle a préparé son doctorat à Harvard, elle a enseigné à Princeton, puis à Stanford.

Mais les élites quittent le pays : selon le quotidien *Shargh*, **76% des Iraniens médaillés dans les olympiades internationales en mathématiques**, entre 1993 et 2013, se trouvent actuellement dans les plus grandes universités américaines Harvard, Princeton, Stanford ou Britanniques.

http://libeteheran.blogs.liberation.fr/lettres_de_/2014/08/fields.html

Les mathématiques en deuil

- **Maryam Mirzakhani est décédée le 15 juillet 2017 à l'âge de 40 ans.**
- **Sa fille Anahita Vondrak avait 6 ans.**
- **Son époux : Jan Vondrak est un théoricien de l’informatique.**

Archimède et les mathématiques

Nous nous limitons à 3 études :

- **Encadrement de π**
- **Calcul d'aires et de volumes** par **comparaison** avec des aires ou volumes de certaines figures. Dans le segment de parabole, il va faire une comparaison avec l'aire d'un triangle de 2 façons différentes :

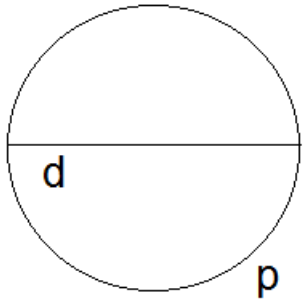
- **1ère méthode** : tel un virtuose, Archimède mélange géométrie, mécanique, équilibre des leviers, centres de gravité… et ce qui deviendra la « Balance d'Archimède ».
- **2ème méthode** : elle est purement géométrique.

Dans les 2 cas, Archimède ne disposait pas du calcul infinitésimal, de la notion de limite mathématique. Il comparait, il a utilisé des encadrements de termes. C'est le procédé connu sous le nom **d'exhaustion**.

- **L'arénaire : recherche d'un majorant du nombre de grains de sable de l'univers.**

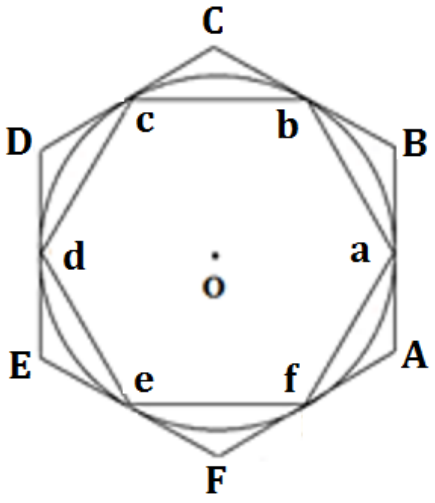
Encadrement de π (I)

- *Pour tout cercle*, le rapport entre son périmètre **p** et son diamètre **d** est égal à un nombre fixe qui a été désigné par **π.**
- **π = p / d = p / 2.r ou bien p = 2.π.r**



Archimède s'est appuyé sur cette constatation pour approcher π.

Archimède construit **deux suites de polygones réguliers** dont les périmètres vont encadrer le périmètre du cercle : voici un schéma avec 2 hexagones, il y a **n côtés égaux (n = 6)**.
On choisira **r = 1**



On admet l'encadrement suivant :

périmètre de abcdefa < p < périmètre de ABCDEFA

ou bien si p = 2.π.r = 2.π

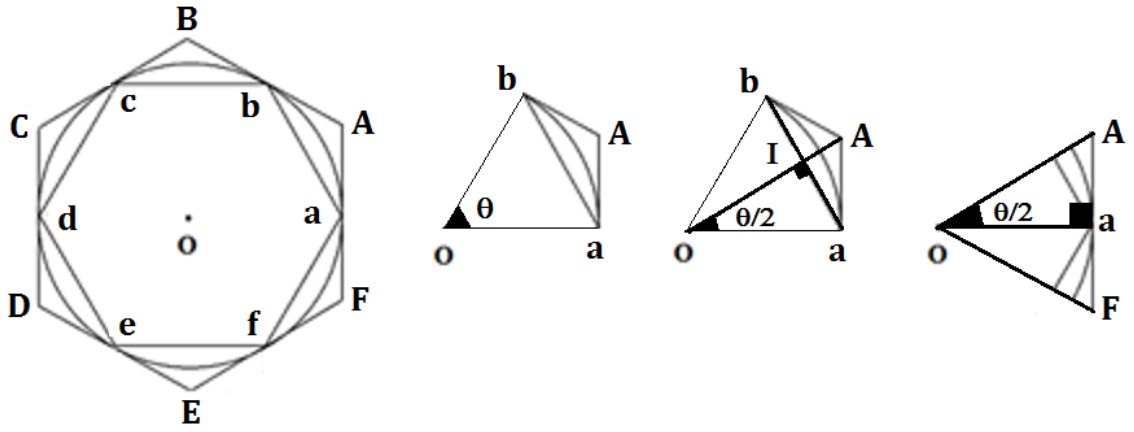
périmètre de abcdefa < **2.π** < périmètre de ABCDEFA

ou encore :

n . longueur d'un coté intérieur < 2.π. < n . longueur d'un coté extérieur

n . ab/2 < π < n . AB/2

Encadrement de π (II)



Données :

n = 6

θ = 360 / n degrés

Rayon = r

Calculs de la longueur des côtés : oA est un axe de symétrie pour la figure oaAb, oA est perpendiculaire à ab en son milieu I (médiatrice de ab). ab/2 = aI, de même : FA/2 = AB/2 = aA

La formule **n . ab/2 < π < n . AB/2 devient**

n . aI < π < n . aA

Dans le triangle rectangle OaI, on calcule aI = sin (θ/2)

Dans le triangle rectangle OaA, on calcule aA = tan (θ/2)

Donc **n . sin(θ/2) < π < n . tan(θ/2)**

- Rappelons que n = 6, θ = 360/n degrés.
- Donc θ/2 = (360/n)/2 = 180/n, d'où : **(1) n . sin (180/n) < π < n . tan (180/n)**

Encadrement de π (III)

Si Archimède avait disposé de tables trigonométriques ou d'une calculette, il aurait pu donner immédiatement des encadrements pour des grandes valeurs de n. Hélas pour lui, il a du faire des calculs « à la main », calculs exécutés pour **n = 6, 12, 24, 48, 96.** Finalement, Archimède a obtenu l'encadrement

- $223 / 71 < \pi < 22 / 7$

soit $3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots$

(à comparer à *3,1415*...).

Comment a-t-il fait ? Archimède part de l'encadrement :

$$n \,.\, \sin(180/n) < \pi < n \,.\, \tan(180/n)$$

An début, n vaut 6, puis 12, 24, 48, 92. A chaque étape, n est multiplié par 2, et donc l'angle qui figure dans le sinus et la tangente est divisé par 2.

Encadrement de π (IV)

Il se trouve qu'on dispose de relations simples entre les lignes trigonométriques d'un angle et celles de la moitié (ou du double) de cet angle :

$$\sin(2x) = 2.\sin(x).\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)\ldots$$

$$\tan(2x) = 2.\ \tan(x)/(\ 1 - \tan^2(x))$$

En utilisant ces relations, on sait calculer sin(x), cos(x) et tan(x) en fonction de sin(2x), cos(2x) et tan(2x).

On peut démarrer ces calculs successifs, car sin(30), cos(30) et tan(30) sont connus.

Cela explique pourquoi Archimède a choisi n = 6, 12, 24, 48, 92

Une petite histoire de π

Depuis « l'éternité » des mathématiciens ont cherché une approximation de π.

- Babylone (-2.000) : 3+1/8 = 3,125
- Egypte (publication dans le Papyrus de Rhind, -1.650) : 256/81 = 3,16...
- Indes (-900) : 339/108, *soit* 3,138…
- **Grèce, *Archimède* (-250)** : la méthode de calcul (algorithme) est une première.
- Chine (263) : 3,14…

➢ 1706 : William Jones désigne ce nombre par **π**, première lettre de **περιφέρεια** (*périphérie en grec*, c'est-à-dire *circonférence*). Certains auteurs attribuent le nom à Adrien Romain.

➢ 1767 : J.H. Lambert démontre que **π est irrationnel** (il n'est pas égal à p/q où p et q sont 2 nombres entiers, q non nul ; π a une infinité de décimales, **sans aucune périodicité**).

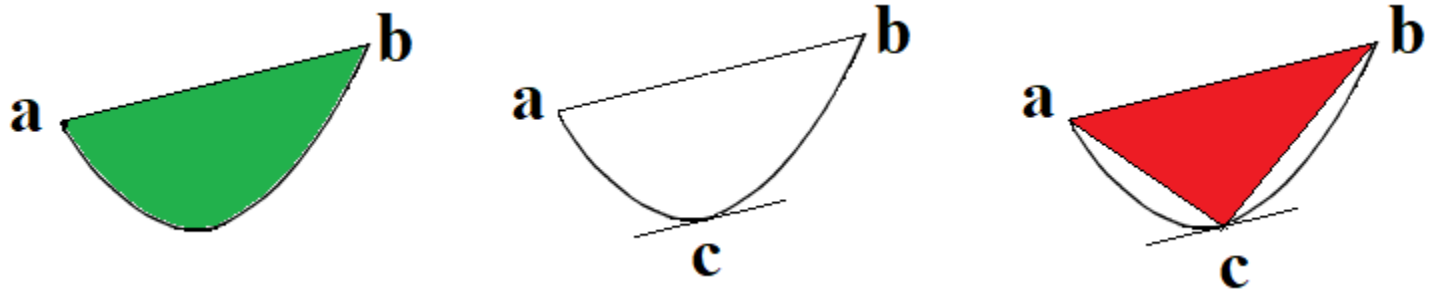
➢ 1882 : Ferdinand von Lindemann démontre que **π est transcendant**. « La transcendance de π a permis la démonstration de l'impossibilité de résoudre plusieurs problèmes anciens de construction géométrique à la règle et au compas, incluant le plus célèbre d'entre eux, la quadrature du cercle ». Un **nombre transcendant** sur les rationnels est un nombre qui n'est racine d'aucune équation polynomiale à coefficients rationnels.

Depuis une dizaine d'années, des records sont battus quand aux nombres de décimales trouvées pour π .

On dépasse allègrement les **10.000 milliards de décimales de π !**

En 2017, un site annonce 22 459 157 718 361 décimales, mais ce nombre n'est pas encore confirmé par d'autres travaux.

Calcul d'aires et de volumes

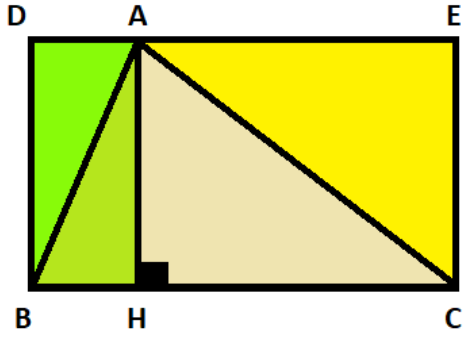


En C, la tangente est parallèle à ab

Archimède veut calculer l'aire du **segment de parabole en vert**. Pour cela, il va **comparer** cette aire avec celle du **triangle rouge**.

Il trouve : **aire segment parabole = 4/3 . Aire triangle rouge**

Intérêt : ***on sait calculer facilement les aires des triangles !***



Pour calculer l'aire du triangle ABC, il suffit de faire la construction à partir de **la hauteur AH**
On construit BD et CE parallèles à AH, DE parallèle à BC. On a :

Aire triangle ABH = ½. Aire rectangle AHBD
Aire triangle ACH = ½. Aire rectangle AHCE
Aire triangle ABC = ½. Aire rectangle BCED = **½. BC*AH**

Archimède (-287,-212) a calculé de nombreux volumes et aires.

La méthode d'exhaustion

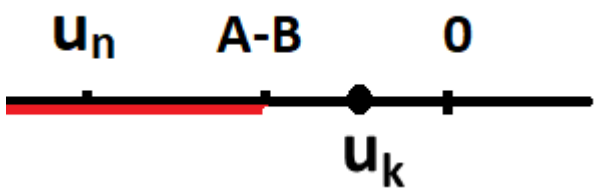
- **On dispose de 2 nombres A et B. On veut montrer que A = B**.

- **Démonstration** : il s'agit d'un **double raisonnement par l'absurde**.
- On suppose que **A < B**, on montre que cela entraîne une **contradiction**, donc A >= B
- On suppose que **A > B**, on montre que cela entraîne une contradiction, donc A <= B
- **Conclusion** : **A = B**
- Pour arriver aux contradictions, Archimède introduit 2 suites de nombres u_n et v_n tels que pour tout entier n :

$$u_n <= A-B <= v_n$$

et que, **on puisse déterminer u_k et v_k arbitrairement voisins de 0** (par exemple entre – 0,001 et + 0,001), **en choisissant k assez grand**

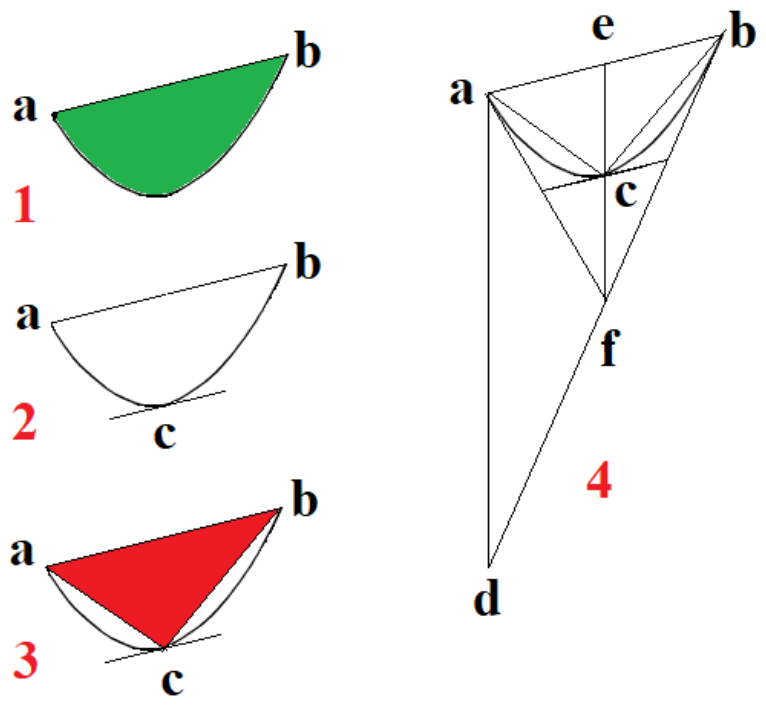
Si A < B alors A-B < 0 et u_n <= A-B < 0
(Lien)



k assez grand → Contradiction !

Idem si on suppose que A > B

Aire d'un segment de parabole



Présentation des éléments :

- 1. Un arc de parabole délimité par une corde ab
- 2. La tangente parallèle à la corde ab au point c
- 3. Le triangle abc inscrit dans la parabole
- 4. D'autres triangles construits à partir de la *tangente* à l'extrémité b de la parabole, la *parallèle* à l'axe de la parabole passant par l'extrémité a de la parabole.

Le problème étudié par Archimède :

- Relations entre les aires des triangles et l'aire du segment de la parabole délimitée par la corde.

➢ *On va voir les grandes lignes des démonstrations*

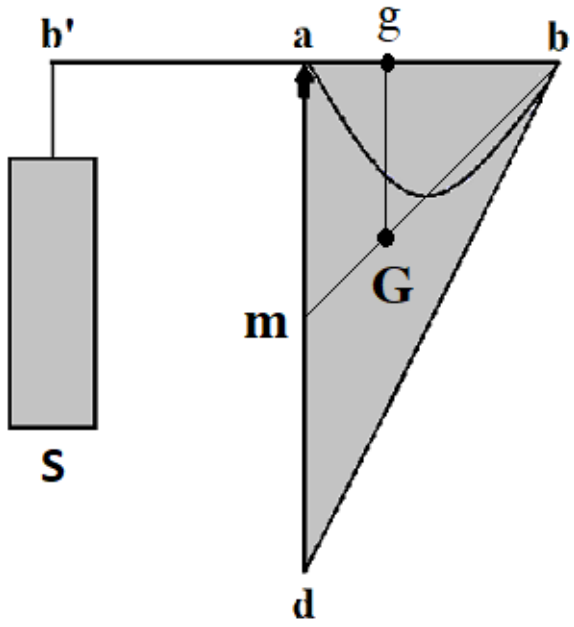
Résultats d'Archimède :

➢ *aire du segment de parabole = 4/3. aire du triangle abc*

(Thalès) A partir de : ***e milieu de ab, f milieu de db, ef et ad parallèles, ab et tangente en c parallèles,*** *on obtient* ***aire abd = 4.aire abc*** *puis l'égalité :*

➢ *aire du segment de parabole = 1/3. aire du triangle abd*

La balance d'Archimède : pesées (I)



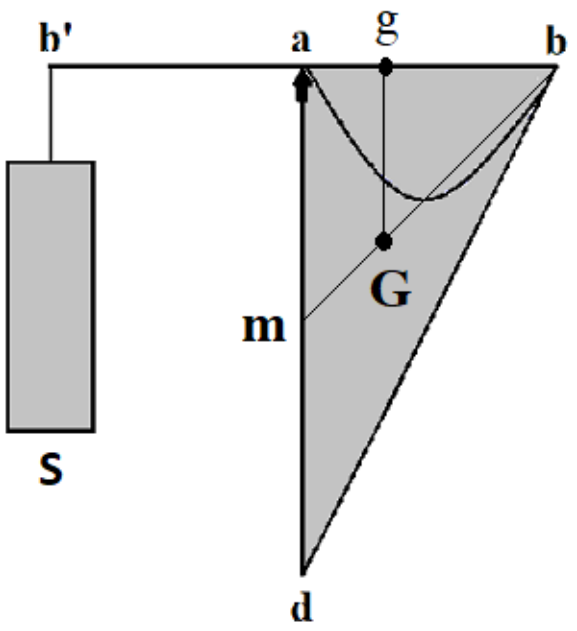
On donne de l'épaisseur uniforme aux figures pour disposer de masses, poids, forces. On simplifie la géométrie.

Le triangle abd est fixé au bras de la balance le long de ab. Des forces *verticales* le tirent vers le bas. Archimède considère que l'ensemble de ces forces s'appliquent en un point, le *centre de gravité* **G** du triangle, ou encore à la *projection* **g** de ce centre de gravité.

Ce centre de gravité est situé au tiers de la médiane bm, à partir de m **mG = 1/3 . mb**

Thalès → **ag = 1/3 . ab**

La balance d'Archimède (II)



La relation d'équilibre global des leviers se traduit par :

ab' . aire(S) = ag . aire(abd)

Mais ag = 1/3 ab = 1/3 ab' (Thalès), d'où

(1) aire(S) = 1/3. aire(abd)

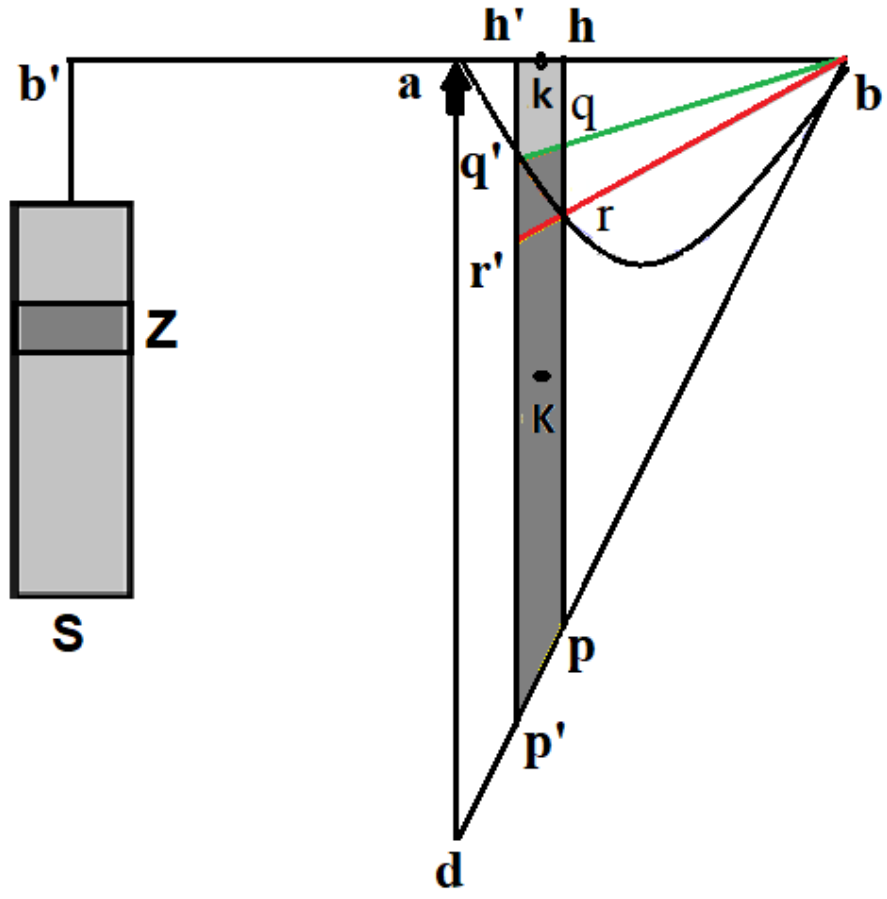
Si je démontre que :

(2) aire(S) = aire(segment de parabole)

alors j'aurais démontré que :

(3) aire(segment de parabole) = 1/3. aire(abd)

Equilibrage du triangle abd par tranches



Les tranches : soit **n** un nombre entier positif assez grand. On partage (ab) en n sous-segments égaux (longueur = ab/n). Soit h'h un de ces sous-segments.
*On **découpe le triangle abd en tranches h'hpp'.*** **Les 4 trapèzes :**

T_i : h'hqq' dit *intérieur* T_e : h'hrr' dit *extérieur*

T_t : h'hpp' dit *total* T_P : h'hrq' dit *Parabole (rq' bout de parabole)*

Le centre de gravité du trapèze T_t

Le trapèze T_t est fixé au bras ab de la balance le long de h'h. Des forces le tirent vers le bas. Archimède considère que l'ensemble de ces forces s'appliquent en un point, le centre de gravité **K** de ce trapèze, ou encore à la projection **k** de ce centre de gravité.

L'équilibre au niveau d'une tranche :

Chaque trapèze total T_t (h'hpp') est équilibré par un rectangle associé Z.

La relation fondamentale qui lie les forces et les bras des leviers ou balance est vérifiée. Cet équilibrage local exige que :

(4) ab' . aire(Z) = ak . aire(T_t)

➢ **Avec une dextérité exceptionnelle, une maîtrise de la géométrie, Archimède démontre « miraculeusement » *l'encadrement suivant* :**

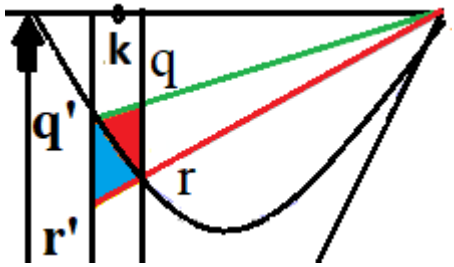
(5) $$\text{aire}(T_i) < \text{aire}(Z) < \text{aire}(T_e)$$

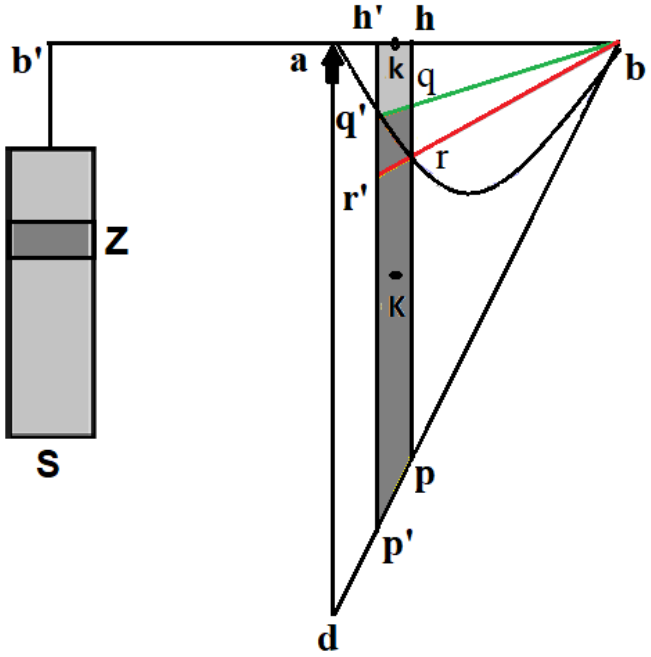
$$\text{aire}(T_p) - \text{aire (triangle rouge)} < \text{aire}(Z) < \text{aire}(T_p) + \text{aire (triangle bleu)}$$

$$-\text{aire (triangle rouge)} < \text{aire}(Z) - \text{aire}(T_p) < \text{aire (triangle bleu)}$$

On additionne les tranches :

(6) $$-\Sigma\,\text{aires (triangles rouges)} < \text{aire}(S) - \text{aire (segment parabole)} < \Sigma\,\text{aires (triangles bleus)}$$





Démonstration par exhaustion. Selon Archimède, les sommes des aires des petits triangles rouges et bleus sont arbitrairement petites !

aire (S) - aire (segment parabole) = 0

Si proche du calcul infinitésimal !

- **250 ans avant J.C.**, **Archimède** maniait déjà certains concepts chers à **Newton** (1642-1723) et **Leibniz** (1646-1716), les pères du **calcul infinitésimal**.
- Comme une somme infinie d'infiniment petits !

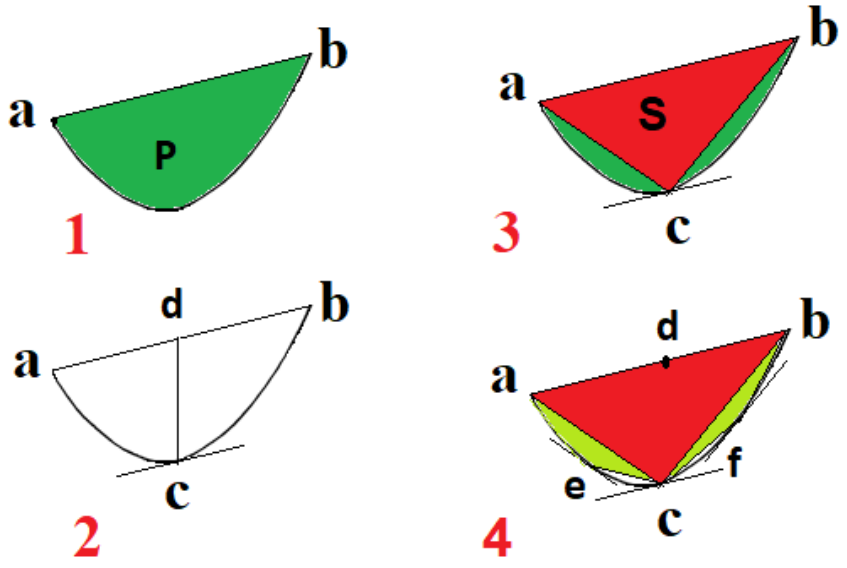
- ***Ce qui manquait à Archimède*** :
- Le **zéro**, chiffre et nombre, l'écriture concise des nombres et les opérations élémentaires sur les nombres. Merci aux mathématiciens indiens et en particulier à Bramagupta (en 628).
- Le signe **=** : 16ème siècle, en particulier, Robert Recorde en 1557.
- Notations : Viète (1540-1603) : ***x***. Descartes (1596-1650) : Il préfère le premier les lettres du début de l'alphabet ***a, b, c, d***… pour les nombres connus (paramètres) et celles de la fin pour les *inconnues* ***x, y, z***.
- Racine **√** ; Puissance a^n
- Notions de calcul infinitésimal : **limite**, dérivée, intégrale, aire, primitive.

- **Les ratés de l'histoire** : Galilée était si proche du calcul infinitésimal et de **la révolution industrielle !**

C’est écrit par Archimède lui-même

- Soient A, B, Γ, Δ, E, des grandeurs en nombre quelconque, établies en série, dont chacune est quadruple de la suivante, et soit A la plus grande. D’autre-part, soit Z le tiers de B, H le tiers de Γ, Θ le tiers de Δ, et I le tiers de E. Dès lors puisque Z est la troisième partie de B tandis que B est la quatrième partie de A, l’ensemble de B, Z sera la troisième partie de A ; par conséquent, pour la même raison, l’ensemble de H, Γ sera la troisième partie de B ; l’ensemble de Θ, Δ, la troisième partie de Γ et l’ensemble I, E, la troisième partie de Δ. Il en résulte que l’ensemble de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I sera la troisième partie de l’ensemble de A, B, Γ, Δ. Or l’ensemble de Z, H, Θ, est aussi la troisième partie de l’ensemble de B, Γ, Δ, ; par conséquent l’ensemble de B, Γ, Δ, E, I est aussi la troisième partie du reste A. Dès lors il est évident que l’ensemble de A, B, Γ, Δ, E augmenté de I c’est-à-dire augmenté du tiers de E, vaut les quatre tiers de A.
- Archimède manquait d’outils et pourtant quel beau travail !

Calcul d'une surface : méthode géométrique



Archimède cherche à calculer l'aire *P* d'un *segment* de parabole (1). Il dessine alors le triangle abc, en c la tangente à la parabole est parallèle à ab (2). On démontre que si d est le milieu de ab, dc est parallèle à l'axe de la parabole. ***La première approximation de l'aire P du segment de parabole vaut $S_1 = S$*** . On a négligé deux segments de paraboles en vert dans la figure 3. On recommence avec une création similaire de 2 nouveaux triangles aec et cfb. **Archimède démontre que l'aire de chaque nouveau triangle est égal au huitième de l'aire du triangle initial.**

Il peut alors approcher *P* par l'aire du triangle initial et des deux nouveaux triangles :

$S_2 = S + S/8 + S/8$ soit $\mathbf{S_2 = S + 2.S/8 = S + S/4 = S.\ (1+1/4)}$

Maintenant, il reste 4 nouveaux petits segments de parabole, on continue avec la même technique.

Au bout de **la nième construction**, on arrive à l'approximation : $S_n = S + S/4 + S/16 + ... + S/4^n$

De la forme $\mathbf{S_n} = S.(1+ 1/4 + 1/16 + ... + 1/4^n) = \mathbf{S.(1 + a+ a^2 + a^3... + a^n) = S.(1 - a^{(n+1)})/(1-a)}$ avec $\mathbf{a = ¼}$.

D'où l'on tire $\mathbf{\lim S_n = 4/3.\ S}$

L'Arénaire (1)

Il s'agit d'un petit volume dédié à Gélon II, roi de Syracuse. Archimède lui expose sa solution pour calculer **un majorant du nombre de grains de sable que pourrait contenir tout l'Univers**. Il s'agit, bien entendu, de l'univers connu des grecs trois siècles avant J.C. Archimède allait se heurter à plusieurs problèmes.

Premier problème (peut-être le plus inattendu).

Clairement, ce genre de problème va déboucher sur des nombres très grands, il se trouve que les grecs ne savaient pas donner des noms à ces nombres. Ils disposaient de signes ou d'assemblages de signes (les lettres de l'alphabet usuel + 3 anciennes lettres) pour désigner les nombres d'une myriade, soit 10.000 unités, ou 10^4 unités avec nos notations scientifiques.

L'Arénaire (2)

En faisant des répétitions, ils pouvaient aller jusqu'à **une myriade de myriade** ($10^4 . 10^4 = 10^8$), mais, **ils n'avaient pas donné un nom à ce nombre**, ils s'arrêtaient donc un nombre avant, nous disons à $10^8 – 1$ ou **99 999 999**. Cela suffisait à l'époque !

Nous travaillons avec les nombres 1, 2, 3…9 en base 10. Archimède va travailler avec les nombres 1, 2, 3… 99 999 999 en base 10^8.

Il ira jusqu'à atteindre le nombre colossal : **1 suivi de 80 millions de milliards de zéros**. Il s'arrête là !

Archimède a cheminé, bien en avance, sur un système de numération de position à base **10^8**

L'Arénaire (3)

Second problème : l'univers des grecs.
De fait, il y avait 2 écoles : les uns disaient que la Terre était fixe et que le Soleil tournait autour de la Terre.
Mais, *Aristarque de Samos* (320-250 avant J.C.) avait émis une hypothèse contraire à celle qui restera en usage jusqu'à Copernic et les lois de Kepler. Chacun se souviendra de l'épisode où Galilée devra adjurer… et finira par dire à voix basse « et pourtant, elle tourne ».
Aristarque avait eu l'intuition de notre système « **Héliocentrique** » où la Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil, la Lune tourne autour de la Terre…
Mais, les **dimensions de l'Univers étaient imprécises** : **diamètres** des astres, **distances** entre les astres… Plusieurs auteurs avaient proposé des évaluations, cependant Archimède entreprit de les préciser.
Il aura besoin de la **technique de la parallaxe**. Cette technique exige des mesures précises d'angles très petits. **A l'époque d'Archimède, les instruments de mesure d'angle étaient insuffisants. Archimède inventa des outils et des procédés pour mesurer ces angles.**

L'Arénaire (4)

Pour le fun, dans la démonstration :

- Nombre de grains de sable que pourrait contenir une graine de pavot : < 10.000
- Diamètre d'une graine de pavot < 1/40 de la largeur d'un doigt…

Le résultat

Après des majorations très larges, Archimède arriva au résultat suivant :

Majorant du nombre de grains de sable de l'univers = 10^{63}.

Extrait de l'Arénaire d'Archimède

Beaucoup d'émotion à la lecture d'un texte signé Archimède : « **J'ai fait tous mes efforts pour prendre, avec des instruments, l'angle qui comprend le soleil et qui a son sommet à l'œil de l'observateur. Cet angle n'est pas facile à prendre, parce qu'avec l'œil, les mains et les instruments dont on se sert pour cela, on ne peut pas le mesurer d'une manière bien exacte. Mais il est inutile de parler davantage de l'imperfection de ces instruments, parce que cela a déjà été fait plusieurs fois. Au reste, il me suffit, pour démontrer ce que je me suis proposé, de prendre un angle qui ne soit pas plus grand que celui qui comprend le soleil et qui a son sommet à l'œil de l'observateur ; et ensuite un autre angle qui ne soit pas plus petit que celui qui comprend le soleil et qui a aussi son sommet à l'œil de l'observateur.** »

Lire le *texte entier* dans l'ARENAIRE. On trouvera ce document sur plusieurs sites Internet, en voici un : http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/arenaire.htm

Archimède et l’astronomie : le planétaire

- **Le planétaire** : il s’agit en quelque sorte **d’un simulateur de notre univers**. En utilisant de nombreuses **roues dentées** (dont il est l’inventeur), Archimède construit un système qui lui permet de simuler le mouvement des astres dans le ciel… tel qu’il était connu à cette époque.

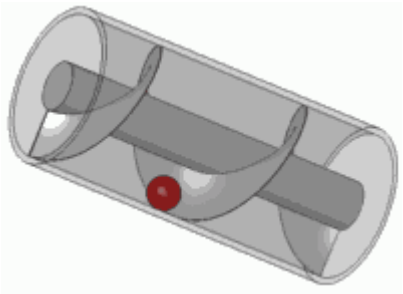
- Archimède est aussi connu comme l’un des concepteurs probables de la ***machine d'Anticythère,*** une espèce de calculateur avant l’heure capable de calculer des positions astronomiques, les dates et heures des éclipses solaires et lunaires.

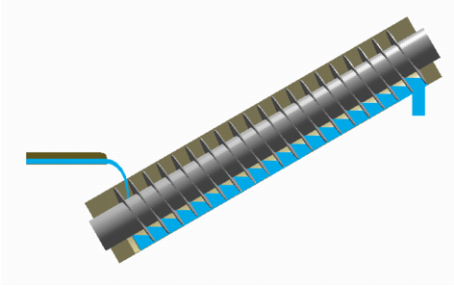
Archimède : Ingénieur Civil (I)

- Le premier type de **vis d'Archimède** (vis sans fin) est une machine élévatoire fonctionnant à pression atmosphérique.

Elle est encore utilisée dans de nombreuses applications un peu partout dans le monde, pour déplacer (généralement en les hissant) des **liquides** (pompage d'eau souterraine) ou de matières en **poudre** ou en **grain** (silos, camions…).

- Le **boulon**, terme qui désigne un ensemble formé d'une vis d'assemblage et d'un **écrou.**
- La **roue dentée** est un des deux éléments qui composent un engrenage.

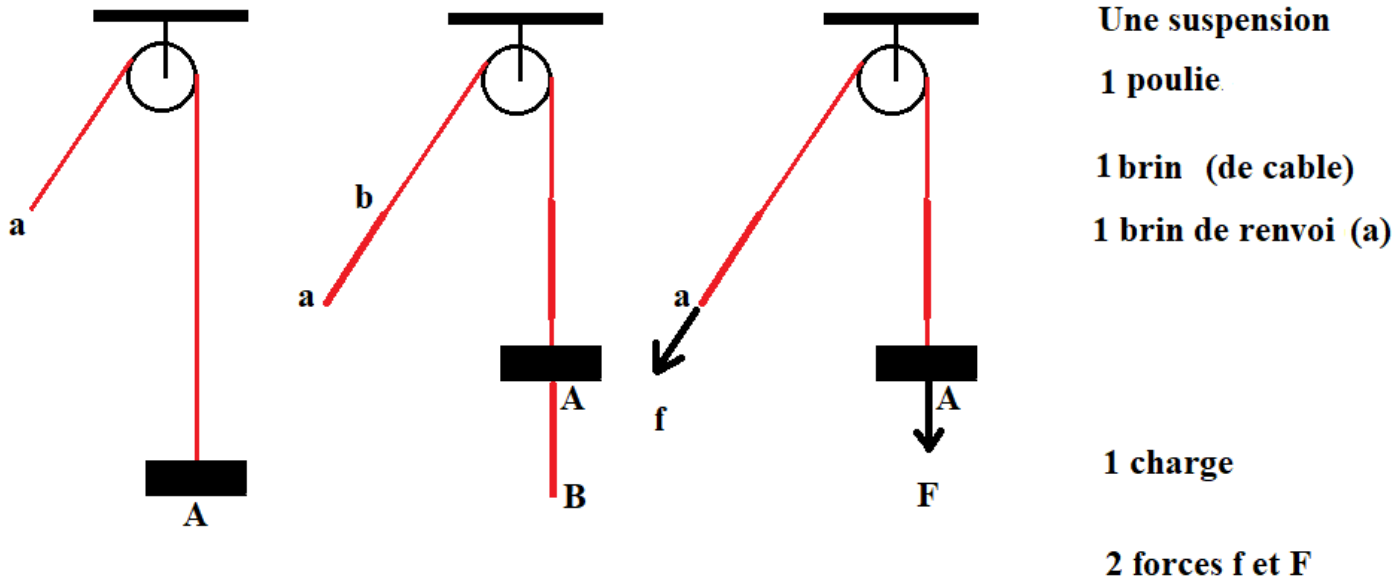




https://fr.wikipedia.org/wiki/Vis_d%27Archim%C3%A8de

Archimède : Ingénieur Civil (II)
Une poulie et un câble : une situation de confort

- Un système avec une poulie est confortable quand **on veut exercer une force f dans la direction qui nous convient**. La force finale étant orientée dans une autre direction. Choisir l'endroit où est fixé « la suspension ». En haut du mât d'un bateau pour soulever une voile…



Dans le cas d'une poulie, la distance ab est répercuté sur le brin (de câble) et sur le déplacement de la charge :

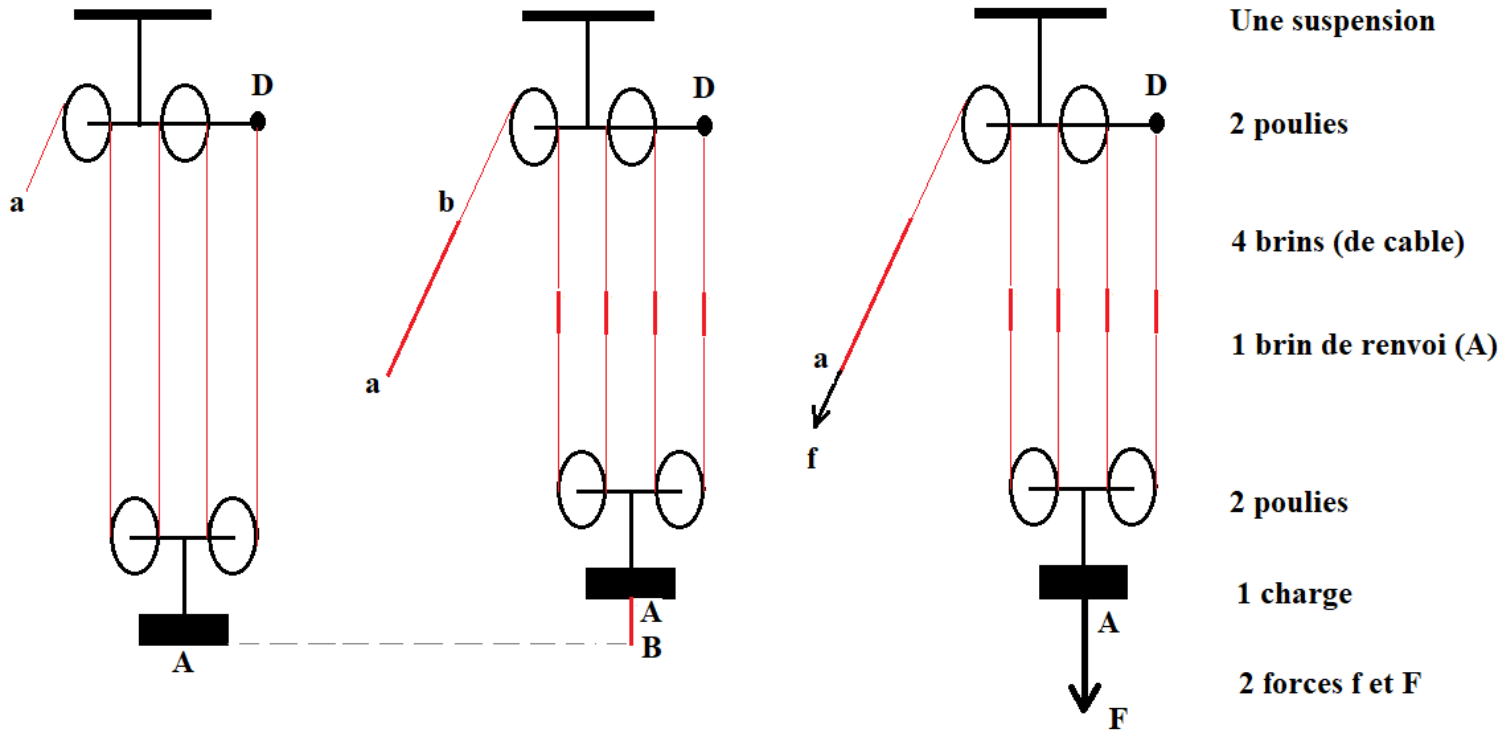
AB = ab

De même, il y a égalité des forces :

F = f

Nous sommes dans une situation de confort (lever une voile).

Archimède : Ingénieur Civil (III)
4 poulies et un câble



La distance ab est répartie sur les 4 brins, donc :

ab = 4 . AB

Il y a 2 forces qui œuvrent dans le sens des déplacements , les travaux effectués sont égaux :

f . ab = F. AB

f . 4 . AB = F . AB

4 . f = F

F = 4 . f

Equivalence : si f représente la force pour soulever une valise (par exemple de 20 kilogrammes). F est alors la force pour soulever 4 valises.

- **La force est multipliée par 4, tandis que le déplacement est divisé par 4.**

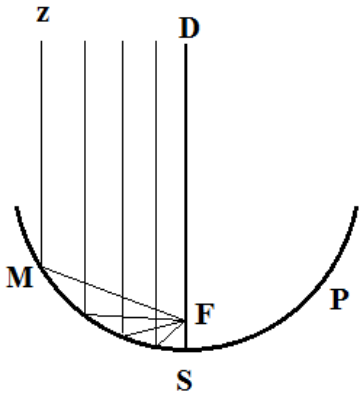
Archimède Ingénieur militaire (I)

- *Archimède fût chargé par le Roi de Syracuse de protéger la ville*. Ses nombreuses inventions font que la ville résista pendant de nombreuses années avant de succomber devant les romains ; encore que, certains auteurs parlent d'une attaque nocturne après une fête locale, d'une trahison… Ce sublime inventeur était même apprécié par ses adversaires, émerveillés par son ingéniosité.
- **Remparts**, **meurtrières** : bien avant notre moyen-âge.
- **Catapultes, arbalètes géantes** (pour lancer des grosses pierres sur les bateaux ennemis**).**
- Il avait doté les murs de la cité de gigantesques **palans** équipés de griffes montés sur des bras qu'un système de contrepoids permettait de relever. Ces engins étaient ainsi capables d'agripper les vaisseaux de guerre qui s'approchaient des murailles et de les faire s'échouer, causant la perte de leurs équipages.
- **Scorpions** (des systèmes pour lancer une nuée de flèches en même temps, comme plus tard, les orgues de Staline).
- **Tours d'assaut.**
- **Odomètres :** les ancêtres de nos compteurs kilométriques, utilisés par l'armée pour un meilleur contrôle des efforts effectués !

Archimède Ingénieur militaire (II)
Optique : miroirs ardents

Aujourd'hui, les « Paraboles » fleurissent sur nos toits. Elles ont pour fonction de *concentrer par réflexion des signaux parallèles* qui arrivent des satellites pour alimenter nos postes de télévision. La concentration a lieu en un point F appelé le **Foyer** de la parabole.

En mathématique, une parabole est une figure géométrique d'un plan. Dans le langage « TV », la parabole est une surface à 3 dimensions, que les mathématiciens désignent par « **Paraboloïde** », obtenue en faisant tourner notre parabole autour de l'axe SD. La réflexion et la convergence des rayons ont toujours lieu.

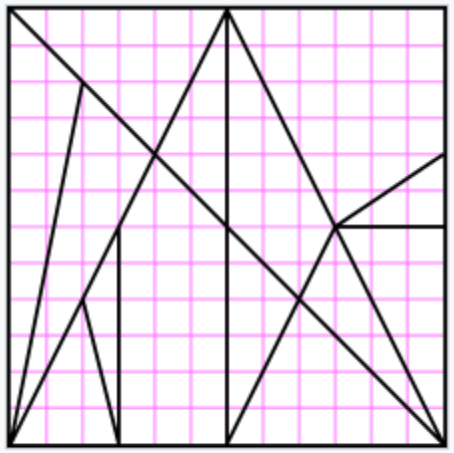


Archimède était bien loin de penser à nos téléviseurs quand il a eu l'idée d'utiliser les miroirs réfléchissants. Pour lui, un grand paraboloïde devait réfléchir les rayons du soleil pour les faire converger vers le foyer situé sur un bateau ennemi (comme pour nos paraboles, il fallait donner au miroir une bonne orientation).

La concentration des rayons solaires devait entraîner un réchauffement au foyer et mettre le feu aux bateaux. C'est le principe des « **Miroirs Ardents** » d'Archimède. **Un mythe veut que pendant une guerre entre les Romains et Syracuse, les miroirs ardents incendiaires les bateaux romains**. *De fait, plusieurs universités de par le monde ont tenté de tester cette technique, il n'y a eu aucune réussite ! Et puis, la technologie de l'époque ne permettait pas de construire ces énormes miroirs.* C'est quand même un beau conte.

Loculus d'Archimède

Loculus d'Archimède (d'après Heinrich Suter).



Ce tracé est le plus simple pour découper les pièces du stomachion.

- L'un des plus vieux **puzzles** connus, attribué à Archimède (287 av. J.C. - 212 av. J.-C.), autrement appelé stomachion. On retrouve la trace de ce puzzle dans le palimpseste d'Archimède.

Le **stomachion** de **Suter** est composé de **14 pièces**, qui peuvent s'agencer de **17 152** façons différentes pour former un carré, mais permettent aussi de construire d'autres formes plus ou moins figuratives (éléphant, soldat, etc.)

Crédit : https://fr.wikipedia.org/wiki/Loculus_d%27Archim%C3%A8de

Bibliographie rapide sur l'Internet

https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/ArchimedeIREM.pdf
http://www.academieduvar.fr/Produits/heures/heures2009/NihoulArchimede.pdf

- http://www.mystere-tv.com/l-extraordinaire-histoire-du-palimpseste-d-archimede-v2421.
- http://oncle-dom.fr/sciences/histoire/archimede/archimede.htm
- http://enseignement-latin.hypotheses.org/6571
- http://www.inorope.com/etheme_portfolio/les-systemes-palans
- https://fr.wikipedia.org/wiki/L%27Ar%C3%A9naire
- http://www.madore.org/~david/weblog/d.2016-03-25.2363.html
- http://perso.ens-lyon.fr/jean-michel.muller/HistVF.pdf
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Fontana-obelisk.jpg
- http://archimede-tpe.e-monsite.com/pages/les-travaux-d-archimede/les-poulies.html

Conclusion

- Notre illustre savant **extrêmement prolixe** a laissé une œuvre colossale, tant du point de vue théorique que du point de vue des applications. Toujours à la recherche de la difficulté et de l'originalité, il a ouvert et couvert des champs insoupçonnables. C'était un grand innovateur et puis, un vulgarisateur hors pair, comme il y en a eu si peu dans l'histoire des civilisations.
- Il a eu **l'intuition du calcul infinitésimal** qui allait bouleverser les mathématiques, la physique et l'industrie vers la fin du XVIème siècle. Malheureusement, il lui manquait quelques outils mathématiques pour l'inventer. **Un des grands rendez-vous manqués de l'histoire.**
- Il a utilisé la **numération à base 10^8**, les bases 10 puis 2 triompheront ensuite.
- Il a été un grand scientifique de l'antiquité, peut-être le plus grand : physicien, mathématicien, ingénieur, inventeur.

Merci

Bibliographie rapide - suite

https://fr.wikibooks.org/wiki/Technologie/Syst%C3%A8mes_de_manutention/Poulies_et_palans#Efficacit.C3.A9_m.C3.A9canique_d.27une_poulie : images simples palans multiplications diverses. Introduction du travail pour obtenir la multiplication. Principe de conservation de l'énergie, travail effectué d'un coté, travail rendu de l'autre. Mouffle : un dispositif mécanique qui permet le levage d'une charge par plusieurs brins de câble Moufflage : la figure formée par les constituants de la moufle. Google : palan principe. Soulever l'obélisque du vatican.

http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ar/node18.html :

Les myriades de myriades…

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/63/Poulie_bateau.jpg/1200px-Poulie_bateau.jpg

Encadrement de π, calculs (IV)

- En utilisant les relations qui lient les lignes trigonométriques d'un angle 2x à celles de x, on obtient :

$$\mathbf{v_{2n}} = 2.u_n.v_n / (u_n + v_n)$$

$$\mathbf{u_{2n}} = \sqrt{u_n.v_{2n}}$$

On peut vérifier ces relations, en remplaçant les divers u et v, par leurs expressions en fonction de l'angle 180/n.

On peut alors faire un calcul par récurrence :

- on connait par calcul direct u_6, v_6 on calcule alors u_{12} et v_{12}
- on connait u_{12}, v_{12} on calcule alors u_{24} et v_{24}
- on connait u_{24}, v_{24} on calcule alors u_{48} et v_{48}
- on connait u_{48}, v_{48} on calcule alors u_{96} et v_{96}

Archimède a fait ces calculs 250 ans avant J.C. !

Calcul d'une surface : méthode géométrique (II)

S_n est du type S_n = **S** $(1 + a + a^2 \ldots a^n)$ avec **a = ¼.**

Calculons la somme $(1 + a + a^2 \ldots + a^n)$. On a en multipliant tous les termes de cette somme par 1 puis - a :

$(1 + a + a^2 \ldots + a^n).(1 - a) = 1 + a + a^2 \ldots + a^n$

$- a - a^2 \ldots - a^n - a^{n+1}$

Il s'en suit que

$(1 + a + a^2 \ldots + a^n).(1- a) = 1 - a^{n+1}$ Donc :

$\mathbf{(1 + a + a^2 \ldots + a^n)} = (1 - a^{n+1})/(1 - a) = \ldots$

$= \mathbf{4/3 - 1/3.\ 1/4^n}$

$$S_n = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3}\frac{S}{4^n}$$

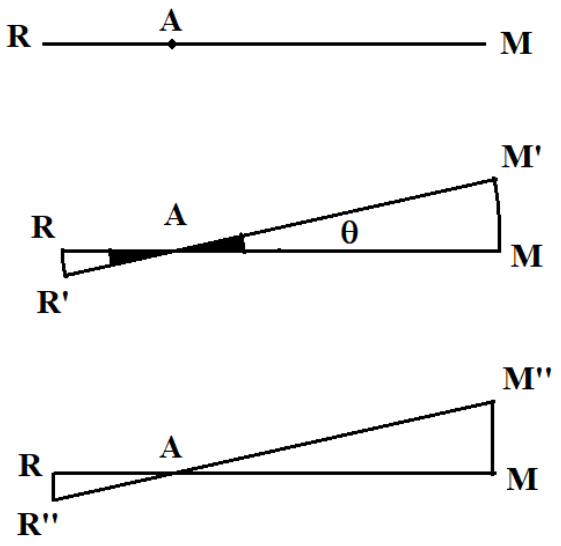
Finalement, en multipliant par S

Clairement :

- **la limite de S_n lorsque que n tend vers l'infini est 4/3.S**

Archimède maîtrisait un procédé dit **d'exhaustion** qui lui a permit de conclure.

La formule d'Archimède et la conservation de l'énergie



Dans la figure supérieure, le levier est à l'horizontale, il y a équilibre.
On va créer un mouvement infinitésimal par rotation d'un angle (très petit) θ autour du point d'appui A : MM' est un arc de cercle de centre A et de rayon AM. « <u>On sait</u> » que dans ce cas **MM' ~ AM.θ** où θ est exprimé en radians.
Mieux, on peut confondre l'arc MM' avec le morceau de tangente MM'' : on a
tan θ = MM''/AM, mais θ étant petit, il y a équivalence entre tan θ et θ. D'où θ ~ MM''/AM **et MM'' ~ AM.θ** .
Le travail WM effectué par la force FM est équivalent à FM.MM'', d'où WM ~ FM.AM. θ On obtiendrait une relation analogue pour le travail WR : WR ~ FR.AR. θ
Comme, il y a **conservation de l'énergie**, on obtient l'égalité : **WM = WR**, c'est-à-dire

FM.AM. θ ~ FR.AR. θ

en simplifiant par θ, on obtient **la formule d'Archimède !**

FM.AM = FR.AR

- **Cette démonstration demande une définition correcte des nombres, la notion d'équivalence, de limites… notions précisées au 17ème siècle par Newton et Leibniz. Idem pour la notion de force, de travail… Archimède ne disposait d'aucun de ces outils !**